Wahana Fisika, 7(2), 2022. 163 - 178
http://ejournal.upi.edu/index.php/wafi
e-ISSN : 2594-1989 https://doi.org/10.17509/wafi.v7i2.52521

Kerangka Acuan Tidak Inertial dan Representasinya untuk Deskripsi Umum Gerak Benda dalam Mekanika Klasik

Mohammad Arifin
Program Studi Fisika, Departemen Pendidikan Fisika, FPMIPA, UPI
Jl. Dr. Setiabudhi No.229 Bandung, Jawa Barat, Indonesia 40154.
Tlp./Fax:62-22-2004548 E-mail: mohammad_arifin@upi.edu

ABSTRAK

Deskripsi umum dari gejala gerak dan penyebabnya dari suatu benda dapat diperoleh melalui representasi kerangka acuan dan model ruang atau sistem koordinat yang digunakan. Hukum-hukum Newton tentang gerak didefinisikan berlaku untuk sistem-sistem fisika dalam kerangka acuan inertial, namun demikian, ketiadaan kerangka acuan universal seperti dinyatakan dalam postulat relativitas khusus Einstein mengakibatkan deskripsi gerak suatu benda dapat dipandang seluruhnya berlangsung dalam kerangka acuan tidak inertial. Dalam tulisan ini, hukum-hukum Newton tentang gerak dinyatakan dalam representasi sistem koordinat umum untuk berbagai jenis keadaan fisis benda yang ditinjau, meliputi: gerak rotasi dalam kerangka acuan umum, persamaan Hamiltonian dan Lagrangian, prinsip usaha minimal (*least action*) dan teorema konservasi, baik untuk sistem konservatif dan non konservatif maupun umum dalam kerangka acuan tidak inertial. Konsekuensi keberlakuan postulat relativitas khusus dalam deskripsi umum gerak benda ditunjukkan dengan membahas transformasi besaran-besaran fisika untuk gerak mendekati kecepatan cahaya dalam ruang Minkowski dan hukum kekekalan materi-energi untuk keadaan gerak tersebut.

Kata kunci: Kerangka acuan tidak inertial, representasi gerak, mekanika klasik, postulat teori relativitas khusus dan hukum kekekalan materi-energi.

e-ISSN : 2594-1989 https://doi.org/10.17509/wafi.v7i2.52521

ABSTRACT

The general description of motion fenomenon of a body and its cause can be obtained through representation of frame of reference and space model or the coordinate system. The Newton laws of motion are defined to be valid for physical systems in the inertial frame of reference, however, the absent of universal frame of reference as stated in the Einstein's postulates of the special theory of relativity implied that the description of motion of a body can be viewed fully to take place in an uninertial frame of reference. In this paper, the Newton laws of motion are represented in general coordinate system in many physical conditions of interest, including: rotation of general frame of reference, equation of the Hamiltonian and Lagrangian, principle of the least action, and conservation theorem for conservative and non conservative systems and those from the uninertial frame of reference. The consequences of the validity of Einstein's postulates of the special theory of relativity for the general description of motion of a body are shown by presenting the transformations of physical quantities for those near the velocity of light in Minkowski space and the conservation of matter-energy for such kind of motions.

Keywords: *Uninertial frame of reference, motion representation, classical mechanics, postulate of the special theory of relativity and conservation of matter-energy.*

1. PENDAHULUAN

Deskripsi gerak benda dalam mekanika Newtonian mengasumsikan keberlakuan kerangka acuan universal atau absolut untuk besaran-besaran fisika yang dideskripsikan. Dalam eksperimen Michelson-Morley [1], medium hipotetik ether sebagai kerangka acuan universal perambatan gelombang cahaya tidak berhasil dibuktikan sehingga gerak titik-titik materi dalam ruang dapat dipandang sebagai gerak relatif kerangka-kerangka acuan yang dibentuk titik-titik tersebut. Secara umum, hukum-hukum Newton tentang gerak dan fisika klasik mendeskripsikan gejala gerak benda dalam sebuah sistem terbatas atau tertutup yang secara jelas memisahkan masing-masing gejala fisis yang bersangkutan dalam kerangka acuan lembam atau inertial, semu atau fiktif [2] dan tidak inertial. Dalam tulisan ini, deskripsi umum gerak benda dibahas dalam representasi kerangka acuan tidak inertial yang berlaku atau diasosiasikan untuk sistem-sistem fisika yang tidak stabil, terstimulasi, atau mengalami transformasi dan/ atau transmutasi sebagai akibat keberlakuan hukum transformasi dan postulat baik dalam mekanika Newtonian [3,4,5] maupun relativistik, khusus dan umum [6,7,8,9,10,11]. Hukum-hukum transformasi dalam teori relativitas umum menyarankan bahwa titik-titik acuan dalam kerangka acuan tidak inertial dibentuk oleh elemen-elemen *infinitesimal* dari kuantisasi ruang-waktu kontinuum (disebut: "*manifold*") yang mengalami transformasi menurut hukum-hukum transformasi yang berlaku dalam group kontinyu [6,8,10].

2. MODEL REPRESENTASI KERANGKA ACUAN TIDAK INERTIAL

2.1. Hukum-hukum Newton Tentang Gerak

Misalkan penyebab perubahan keadaan gerak titik materi disebut sebagai *force* (**F**, cetak tebal menyatakan vektor), maka **F** sebanding dengan perubahan keadaan gerak titik materi atau percepatan (**a**). Diberikan persamaan untuk gaya atau resultan gaya sebagai berikut:

$$\mathbf{F} \propto \mathbf{a} \quad \text{atau} \quad \sum_i \mathbf{F}_i \propto \mathbf{a}\,, \tag{1}$$

dimana

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{\Delta t}\,, \tag{2}$$

dengan indeks i menyatakan bahwa sumasi dilakukan terhadap suku-suku ke-i dan **v** menyatakan kecepatan yang didefinisikan sebagai

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\Delta t}\,. \tag{3}$$

Karena penyebab gerak partikel adalah gaya dan karakteristik dinamika partikel di alam semesta ditentukan oleh interaksi atau potensial, maka gaya merupakan suatu bentuk representasi dari jenis interaksi tersebut. Jika gaya bekerja pada partikel di ruang hampa atau gaya tidak dikonstrain (bebas), maka partikel secara alamiah akan dipercepat dari satu titik ke titik yang lain. Besar gaya sebanding dengan besar percepatan. Titik massa tersebut berprilaku sebagai mediator (pembawa gaya) dari gaya atau potensial yang bersangkutan. Dalam kerangka acuan tidak inertial, titik materi yang dipercepat menjadi tidak stabil. Sifat ini identik (ekuivalen) dengan partikel pembawa interaksi fundamental di alam semesta (yaitu: gravitasi, elektromagnetik, nuklir kuat dan nuklir lemah). Dengan demikian, jelas bahwa

$$\sum_i \mathbf{F}_i = m\ddot{\mathbf{r}} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\,, \tag{4}$$

yang merupakan ungkapan matematis dari hukum II Newton. Jika resultan gaya sama dengan nol, maka percepatan partikel

Wahana Fisika, 7(2), 2022. 163 - 178
http://ejournal.upi.edu/index.php/wafi
e-ISSN : 2594-1989 https://doi.org/10.17509/wafi.v7i2.52521

adalah nol pula yang berarti partikel tidak mengalami perubahan percepatan [pers.(2)] atau kecepatan partikel adalah nol atau tetap [pers.(3)]. Dalam rentang waktu mendekati nol, maka partikel berada dalam keadaan diam atau bergerak dengan laju tetap. Keadaan ini mengisyaratkan keberlakuan hukum I Newton. Jika terdapat 2 (dua) partikel atau lebih saling berinteraksi membentuk 1 (satu) buah sistem, maka berlaku

$$\sum_i \mathbf{F}_{12}^i + \sum_i \mathbf{F}_{21}^i = 0\,, \tag{5}$$

atau

$$\sum_i \mathbf{F}_{12}^i = -\left[\sum_i \mathbf{F}_{21}^i\right]. \tag{6}$$

Pers.(6) merupakan persamaan gaya-gaya aksi-reaksi yang menyatakan hukum III Newton. Karena keadaan kinematika partikel tidak dapat dilepaskan dari penyebabnya (gaya atau potensial) maka gaya dapat dinyatakan dalam momentum (**p**) yang didefinisikan sebagai

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}\,, \tag{7}$$

sehingga gaya atau resultan gaya dinyatakan oleh

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1}{\Delta t}\,. \tag{8}$$

Secara umum hubungan antara gaya dan energi kinetik dapat diperoleh menggunakan prinsip de'Alembertian sebagai berikut:

$$\text{Usaha} = W = \int_s \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_v m v \frac{ds}{dt} = m\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = K_2 - K_1 = \Delta K \tag{9}$$

dimana K_2 dan K_1 masing-masing adalah energi kinetik setelah dan sebelum dikenai gaya **F**. Menurut prinsip kerja virtual de'Alembert (dikembangkan dari James Berneulli) ditunjukkan bahwa [3],

$$\sum_i \left(\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i\right)\delta\mathbf{r}_i = 0\,, \tag{10}$$

dengan $\mathbf{F}_i^{(a)}$ menyatakan gaya yang bekerja (*applied force*) dan $\delta\mathbf{r}_i$ adalah variasi posisi. Jika medan atau potensial yang melakukan usaha, maka sifat konservatisme dari gaya **F** harus diuji, yaitu dengan mengevaluasi apakah;

$$\oint_s \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 0 \text{ dan}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0, \tag{11}$$

jika pers.(11) dipenuhi, maka gaya tersebut berasal dari medan konservatif (biasanya tidak memiliki komponen tensorial). Hubungan antara gaya dan potensial secara umum diberikan oleh

$$F_x = -\frac{dV(x)}{dx} \text{ atau}$$
$$F_x = -\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x}\,. \tag{12}$$

Dari pers.(9) diketahui bahwa untuk potensial yang konservatif, usaha yang dilakukan potensial tersebut terhadap titik materi sama dengan perubahan besar energi kinetiknya. Dengan menuliskan

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dK}{dv}\right) \text{ dan } F = -\frac{dV}{dr}\,, \tag{13}$$

Wahana Fisika, 7(2), 2022. 163 - 178
http://ejournal.upi.edu/index.php/wafi
e-ISSN : 2594-1989 https://doi.org/10.17509/wafi.v7i2.52521

maka hukum II Newton [pers.(4)] untuk sistem konservatif dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{dK(v)}{dv}\right]+\frac{dV(r)}{dr}=0\,, \qquad (14)$$

atau dengan ungkapan lain

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{dK(\dot{r})}{d\dot{r}}\right]+\frac{dV(r)}{dr}=0\,. \qquad (15)$$

Pers.(14) dan (15) berlaku untuk titik materi (partikel) yang ukurannya dapat diabaikan, atau hanya bergerak translasi. Untuk benda-benda besar dan sistem partikel yang ukurannya tidak dapat diabaikan, maka ungkapan untuk hukum II Newton disesuaikan untuk mencakup gerak translasi dan rotasi. Ekuivalen dengan dengan gerak translasi, dalam gerak rotasi

$$\sum_i \sigma_A^i=\frac{dL_A}{dt}=I_A\alpha\,, \qquad (16)$$

dimana A titik sumbu rotasi, σ momen gaya, L momentum sudut, I momen inertia dan α percepatan rotasi. Momen inertia sistem partikel diberikan oleh

$$I_A=\sum_{i=1}^{\infty} m_i r_{iA}^2 \quad \text{atau} \quad I_A=\int_{m=0}^{m=M} r_{iA}^2\,dm\,, \qquad (17)$$

dimana tanda sumasi menyatakan distribusi massa diskrit dan tanda integral menyatakan distribusi massa kontinyu. Besar momen inertia sangat ditentukan oleh letak titik sumbu rotasi (A). Percepatan rotasi diberikan oleh

$$\alpha=\dot{\omega}=\frac{d\omega}{dt} \quad \text{dan} \quad \omega=\dot{\theta}=\frac{d\theta}{dt}\,, \qquad (18)$$

dengan ω kecepatan anguler dan θ sudut putar atau sudut anguler. Momentum sudut didefinisikan sebagai

$$\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}\,, \qquad (19)$$

untuk **r** vektor posisi dari titik asal dan **p** momentum linier. Jika vektor posisi **r** diberikan oleh

$$\mathbf{r}=\hat{\mathbf{i}}x+\hat{\mathbf{j}}y+\hat{\mathbf{k}}z\,, \qquad (20)$$

maka dalam koordinat kartesian 3 (tiga) dimensi pers.(19) berbentuk

$$\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ x & y & z\\ p_x & p_y & p_z\end{vmatrix}=\hat{\mathbf{i}}(yp_z-zp_y)+\hat{\mathbf{j}}(zp_x-xp_z)+\hat{\mathbf{k}}(xp_y-yp_x)\,, \qquad (21)$$

dengan demikian momentum anguler mengandung komponen momentum linier dari segala arah. Pers.(16) dapat dituliskan kembali menjadi

$$\sum_i \boldsymbol{\sigma}_i=\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{p})=\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt}+\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{p}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}+\mathbf{v}\times\mathbf{p}\,, \qquad (22)$$

jika hanya arah vektor posisi yang berubah, sedangkan besar vektor posisi tetap, maka pers.(22) menjadi

$$\sum_i \boldsymbol{\sigma}_i=\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{p})=\mathbf{r}\times\mathbf{F}\,, \qquad (23)$$

dan

$$\mathbf{v}\times\mathbf{p}=0\,, \qquad (24)$$

dimana seluruh vektor diukur dari titik asal. Dalam gerak menggelinding, gerak translasi dipadukan dengan gerak rotasi, sehingga besar energi total (U) sistem partikel diukur dari titik asal diberikan oleh

$$U(r,v,\omega)=K_T(v)+K_R(\omega)+V(r)\,, \qquad (25)$$

sehingga hukum II Newton berbentuk

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{dK(\dot{r})}{d\dot{r}}\right]_T+\frac{d}{dt}\left[\frac{dK(\dot{\theta})}{d\dot{\theta}}\right]_R+\frac{dV(r)}{dr}=0, \quad (26)$$

karena

$$K=K_T+K_R, \quad (27)$$

dimana indeks T dan R masing-masing untuk translasi dan rotasi. Jika derajat kebebasan bertambah, misalnya mencakup gerak vibrasi atau osilasi maka energi kinetik vibrasi atau osilasi $K_{\text{vib.}}$ atau $K_{\text{osil.}}$ harus ditambahkan ke ruas kanan pers.(26) dan seterusnya.

2.2. Kerangka acuan tidak inertial rotasional

Gerak rotasi yang mencakup rotasi *infinitesimal* terhadap suatu titik acuan tertentu mengakibatkan titik materi yang berotasi atau titik-titik lain di sekitar titik materi yang berotasi tersebut mengalami percepatan relatif dan gejala-gejala fisika lainnya yang khas seperti gejala pemancaran atau penyerapan gelombang elektromagnetik. Oleh karena itu, secara keseluruhan, sistem fisika yang bergerak rotasi dan pengamatnya membentuk kerangka acuan tidak inertial (rotasional) yang ditandai oleh, menurut Max Born [1], dengan keberadaan gaya sentrifugal dan efek fisis lainnya yang bekerja di dalam sistem tersebut. Istilah tidak inertial rotasional digunakan untuk membedakannya dengan kerangka acuan tidak inertial lainnya yang disebabkan oleh keberlakuan suatu aturan atau hukum-hukum tertentu, seperti transformasi relativitas khusus dalam ruang Minkowski atau relativitas umum dalam ruang Riemann dan postulat mekanika kuantum dalam ruang Hilbert [9,11,12].

Jika diberikan vektor sembarang $\mathbf{Q}$ di dalam kerangka absolut atau universal S dengan titik asal O dan kerangka acuan sistem yang bergerak rotasi S' dengan vektor jari-jari $\mathbf{R}=\mathbf{R}'$ dan kecepatan anguler $\mathbf{\Omega}$, maka laju perubahan vektor $\mathbf{Q}$ terhadap waktu di dalam kerangka universal S dapat dituliskan sebagai [3]

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt}=\mathbf{\Omega}\times\mathbf{Q}, \quad (28)$$

pada saat yang sama menurut kerangka S' pers. (28) dapat dituliskan sebagai

$$\frac{d'\mathbf{Q}}{dt}=0, \quad (29)$$

dengan

$$\left[\frac{d}{dt}\right]_S=\left[\frac{d'}{dt}\right]_{S'}, \quad (30)$$

yang berarti tidak terjadi perubahan apa pun terhadap vektor $\mathbf{Q}$. Jika $d'\mathbf{Q}/dt\neq 0$ maka dengan menggunakan prinsip superposisi *infinitesimal* berlaku

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt}=\frac{d'\mathbf{Q}}{dt}+\mathbf{\Omega}\times\mathbf{Q}, \quad (31)$$

Wahana Fisika, 7(2), 2022. 163 - 178
http://ejournal.upi.edu/index.php/wafi
e-ISSN : 2594-1989 https://doi.org/10.17509/wafi.v7i2.52521

jika vektor $\mathbf{Q}$ digantikan oleh vektor $\mathbf{R} = \mathbf{R}'$ dan kemudian disubstitusikan ke pers.(31) maka

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d'\mathbf{R}'}{dt} + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{R}', \qquad (32)$$

atau

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{R}', \qquad (33)$$

sehingga deferensiasi terhadap pers.(33) menghasilkan

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \frac{d\mathbf{\Omega}}{dt}\times\mathbf{R}' + \mathbf{\Omega}\times\frac{d\mathbf{R}'}{dt}. \qquad (34)$$

Pers.(33) dapat dituliskan kembali dengan menggunakan pers.(31), menjadi

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{d'\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{v} = \frac{d'}{dt}(\mathbf{v}' + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{R}') + \mathbf{\Omega}\times(\mathbf{v}' + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{R}') \\ &= \frac{d'\mathbf{v}'}{dt} + 2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{v}' + \frac{d'\mathbf{\Omega}}{dt}\times\mathbf{R}' + \mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{R}'),\end{aligned} \qquad (35)$$

dengan ungkapan lain

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d'\mathbf{v}'}{dt} + 2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{v}' + \mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{R}') + \dot{\mathbf{\Omega}}\times\mathbf{R}'. \qquad (36)$$

Jika ruas kiri dan kanan pers.(36) dikalikan dengan $-m$, maka diperoleh ungkapan untuk gaya inertia ($\mathbf{F}_\mathrm{I}$) yang bekerja pada masing-masing kerangka acuan S dan S', yaitu

$$-m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -m\frac{d'\mathbf{v}'}{dt} - 2m\mathbf{\Omega}\times\mathbf{v}' - m\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{R}') - m\dot{\mathbf{\Omega}}\times\mathbf{R}, \qquad (37)$$

atau

$$\mathbf{F}_\mathrm{I} = \mathbf{F}'_\mathrm{I} - 2m\mathbf{\Omega}\times\mathbf{v}' - m\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{R}') - m\dot{\mathbf{\Omega}}\times. \qquad (38)$$

Suku ke-3 ruas kanan pers.(38) menyatakan gaya sentrifugal

$$\mathbf{F}_\mathrm{SF} = -m\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{R}') = -m\mathbf{\Omega}^2\mathbf{R}'^2_\perp = -m\omega^2\mathbf{R}'^2_\perp, \qquad (39)$$

yang dapat diperoleh dari energi potensial rotasi

$$\phi = \frac{1}{2}m\omega^2 r_\perp^2. \qquad (40)$$

Suku ke-2 ruas kanan pers.(38) menyatakan gaya Coriolis yang bergantung kepada kecepatan partikel yang berotasi,

$$\mathbf{F}_\mathrm{Coriolis} = -2m\mathbf{\Omega}\times\mathbf{v}' = 2m\mathbf{v}'\times\mathbf{\Omega}, \qquad (41)$$

pertama kali dibuktikan keberadaannya melalui eksperimen pendulum oleh Foucault yang membuktikan keberadaan rotasi bumi terhadap sumbunya sendiri. Sedangkan suku ke-4 pers.(38) disebut sebagai gaya Euler (*Euler force*) yang bergantung kepada perubahan vektor kecepatan anguler baik pada besar maupun arahnya, yaitu

$$\mathbf{F}_\mathrm{Euler} = -m\dot{\mathbf{\Omega}}\times\mathbf{R}', \qquad (42)$$

dengan demikian secara umum, resultan gaya efektif yang bekerja pada sistem yang bergerak rotasi memiliki komponen sebagai berikut [2,3]

$$\mathbf{F}_\mathrm{Efektif} = \mathbf{F}_\mathrm{Penekan} + \mathbf{F}_\mathrm{SF} + \mathbf{F}_\mathrm{Coriolis} + \mathbf{F}_\mathrm{Euler} + \mathbf{F}_\mathrm{Inertia}, \qquad (43)$$

dimana gaya penekan (*impressed force*) terdapat di pers.(43) akibat keberadaan gaya inertia yang keduanya, seolah-olah, bertindak sebagai gaya aksi-reaksi dalam kerangka acuan absolut atau universal, yang meniadakan gaya sentrifugal, gaya Coriolis

Wahana Fisika, 7(2), 2022. 163 - 178
http://ejournal.upi.edu/index.php/wafi
e-ISSN : 2594-1989 https://doi.org/10.17509/wafi.v7i2.52521

dan gaya Euler; yang ketiganya hanya bekerja pada kerangka acuan tidak inertial rotasi.

2.3. Persamaan gerak dalam Lagrangian dan Hamiltonian

Dinamika sistem banyak partikel lebih sederhana jika dinyatakan dalam persamaan Lagrangian atau Hamiltonian dibandingkan menggunakan hukum II Newton. Lagrangian suatu sistem partikel diberikan oleh

$$L(v,r;t) = K(v) - V(r)\,, \qquad (44)$$

Dimana L, K dan V masing-masing menyatakan Lagrangian, energi kinetik dan energi potensial, $v = \dot{r}$ kecepatan, r posisi dan t waktu. Jika medan adalah konservatif (Goldstein, 1980) dan sistem hanya terdiri atas satu buah partikel, maka

$$\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{dK}{dv} = 2\left(\tfrac{1}{2}mv\right) = mv\,, \qquad (45)$$

dan

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dp}{dt} = F\,, \qquad (46)$$

kemudian,

$$\frac{\partial L}{\partial r} = -\frac{dV}{dr} = F\,, \qquad (47)$$

sehingga berdasarkan pers.(12) dan (13), dihasilkan

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L(\dot{r},r;t)}{\partial \dot{r}}\right] - \frac{\partial L(\dot{r},r)}{\partial r} = F - F = 0\,. \qquad (48)$$

Pers.(14) adalah persamaan gerak sistem partikel yang berlaku umum dibawah medan konservatif. Untuk medan non konservatif, persamaan Lagrangian didefinisikan secara khusus. Jika sistem terdiri atas banyak partikel (n partikel) yang dinyatakan dalam sistem koordinat umum, maka didefinisikan

$$r = f(q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n) = f(q_i), \qquad (49)$$

dengan $i = 1,2,3,\cdots,n$; sehingga berlaku

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L(\dot{q}_i, q_i;t)}{\partial \dot{q}_i}\right\} - \frac{\partial L(\dot{q}_i, q_i)}{\partial q_i}\right] = 0\,. \qquad (50)$$

Prosedur yang sama berlaku untuk Hamiltonian yang didefinisikan sebagai

$$H(\dot{r},r) = K(\dot{r}) + V(r), \qquad (51)$$

yang memberikan harga-harga

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{r}} = \frac{dK}{d\dot{r}} = \frac{d\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right)}{d\dot{r}} = m\dot{r} = p\,, \qquad (52)$$

dan

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{dp}{dt} = F\,, \qquad (53)$$

selanjutnya

$$\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{dV}{dr} = -F\,. \qquad (54)$$

Dengan demikian,

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial H(\dot{r},r)}{\partial \dot{r}}\right\} + \frac{\partial H(\dot{r},r)}{\partial r} = F - F = 0\,, \qquad (55)$$

atau dalam sistem koordinat umum N dimensi,

$$\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial H(\dot{q}_i, q_i)}{\partial \dot{q}_i}\right\} + \frac{\partial H(\dot{q}_i, q_i)}{\partial q_i}\right] = 0\,. \qquad (56)$$

Jika konstrain diberikan, maka gaya dapat merupakan fungsi linier dari kecepatan maupun posisi, dan Lagrangian atau Hamiltonian dapat berubah bentuknya dari pers.(50) dan (56).

Wahana Fisika, 7(2), 2022. 163 - 178
http://ejournal.upi.edu/index.php/wafi
e-ISSN : 2594-1989 https://doi.org/10.17509/wafi.v7i2.52521

2.4. Prinsip *least action* (Usaha minimal)

Least action (usaha minimal; *A*) merupakan salah satu bentuk prinsip variasi yang diasosiasikan dengan formulasi Hamiltonian sistem yang diberikan oleh [3,4]

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i \dot{q}_i dt \, , \qquad (57)$$

dimana Hamiltonian adalah sebuah kuantitas yang kekal, sehingga berlaku

$$\Delta A = \Delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i \dot{q}_i dt = 0 \, , \qquad (58)$$

dengan notasi "Δ" menunjukkan proses variasi (disebut: Δ-process) yang dibedakan dengan variasi virtual bernotasi "δ" (kalkulus variasi biasa; δ-process) [3]. Dalam variasi δ perubahan sistem terjadi secara virtual atau semu dimana waktu merupakan besaran yang konstan sementara yang mengalami konstrain atau diperlakukan sebagai variabel adalah sistem koordinat yang digunakan. Jika sistem berubah terhadap waktu, maka δ-process memiliki lintasan virtual yang tidak selalu berimpit dengan lintasan sebenarnya sehingga Hamiltonian sistem tidak lagi kekal. Dalam Δ-process variasi atau perubahan sistem selalu mengikutsertakan variabel waktu dt dan lintasan yang ditempuh dipertahankan konsisten antara lintasan fisis gerak atau lintasan aktual dengan lintasan variatif dimana Δ-process dilakukan, oleh karenanya, jika Hamiltonian sistem kekal di dalam lintasan aktual, maka juga kekal pada lintasan variatif. Waktu untuk berpindah antar titik-titik pada lintasan disesuaikan sedemikian sehingga perubahan sistem dipercepat atau diperlambat untuk mempertahankan Hamiltonian sistem konstan. Sebagai akibatnya, Δ-process mencakup variasi waktu *t* pada titik-titik batas akhir dimana variasi koordinat q_i tetap nol. Variasi dalam koordinat $q_i(\alpha, t)$ didefinisikan sebagai

$$\Delta q \to d\alpha \left(\frac{dq}{d\alpha} \right) = d\alpha \left(\frac{\partial q}{\partial \alpha} + \dot{q} \frac{dt}{d\alpha} \right), \qquad (59)$$

dimana

$$\delta q \to d\alpha \frac{\partial q}{\partial \alpha} \, . \qquad (60)$$

Sehingga pers.(59) dapat dituliskan kembali menjadi

$$\Delta q = d\alpha \frac{\partial q}{\partial \alpha} + \dot{q} dt = \delta q + \dot{q} \Delta t \, , \qquad (61)$$

karena $\dot{q}$ terjadi akibat proses variasi waktu Δt. Untuk sebuah fungsi sembarang $f(q,t)$ berlaku

$$\Delta f = \delta f + \dot{f} \Delta t \, , \qquad (62)$$

secara umum, (variasi dalam variabel *q* dan *t*)

$$\Delta f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \Delta q_i + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t \, , \qquad (63)$$

substitusi pers.(61) ke pers.(63) memberikan

Wahana Fisika, 7(2), 2022. 163 - 178
http://ejournal.upi.edu/index.php/wafi
e-ISSN : 2594-1989 https://doi.org/10.17509/wafi.v7i2.52521

$$\Delta f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i}\left(\delta q_i + \dot{q}_i \Delta t\right) + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i}\delta q_i \quad (64)$$

Aksi A dari pers.(57) sekarang berbentuk,

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i \dot{q}_i dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + H\left(t_2 - t_1\right), \quad (65)$$

dimana H kekal (dalam interval waktu t dan pada titik-titik batas awal dan akhir), sehingga

$$\Delta A = \Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \Delta\left[H\left(t_2 - t_1\right)\right] = \Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + H(\Delta \quad (66)$$

,

yang dapat disederhanakan dengan bantuan notasi,

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \Delta\left[I\left(t_2\right) - I\left(t_1\right)\right] = \Delta I\left(t_2\right) - \Delta I\left(t_1\right) \quad (67)$$

,

dengan menggunakan pers.(62), pers.(67) menjadi

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \left[\delta I(t_2) + \dot{I}(t_2)\Delta t_2\right] - \left[\delta I(t_1) + \dot{I}(t_1)\Delta t_1\right] = \delta I(t_2) - \delta I(t_1) + \dot{I}(t_2)\Delta t_2 - \dot{I}(t \quad (68)$$

,

atau [dari pers.(67)],

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta\left[I\left(t_2\right) - I\left(t_1\right)\right] + \dot{I}(t)\Delta t\Big|_{t_1}^{t_2} = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + L\Delta \quad (69)$$

,

karena $\frac{d}{dt}\int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta\left[\dot{I}\left(t_2\right) - \dot{I}\left(t_1\right)\right]$. Oleh prinsip Hamilton [3], suku pertama ruas kanan pers.(69) menuju nol, karena menurut prinsip Hamilton $\delta q_i \to 0$ pada titik-titik batas awal-akhir variasi, tetapi dalam Δ-process digunakan Δq_i yang berharga tidak menuju nol pada titik-titik batas. Harga aktual dari integral pers.(67) dapat ditentukan sebagai berikut [$L(q, \dot{q}, t)$],

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta L) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right] dt \quad (70)$$

,

dalam δ-process, t merupakan kuantitas fisis yang tetap. Dengan menggunakan persamaan Lagrangian, pers.(70) dapat dituliskan menjadi

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\delta q_i\right] dt = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)\right] dt \quad (71)$$

,

kembali dengan menggunakan pers.(62), pers.(71) berbentuk

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\Delta q_i - \dot{q}_i \Delta t\right)\right\}\right] dt = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\Delta q_i - \dot{q}_i \Delta t\right)\Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (72)$$

Pada titik-titik batas, harga $\Delta q_i \to 0$, namun karena waktu yang diperlukan pada titik-titik persinggahan tidak tetap maka $\Delta t \nrightarrow 0$ atau Δt tidak menuju nol, sehingga

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = -\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \Delta t\Big|_{t_1}^{t_2}, \quad (73)$$

maka

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = -\sum_i p_i \dot{q}_i \Delta t\Big|_{t_1}^{t_2}, \quad (74)$$

dari pers.(65) dan (69), total variasi dari action A dapat dituliskan menjadi

$$\Delta A = \Delta \sum_i \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i dt = \Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + H\Delta t\Big|_{t_1}^{t_2} = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + L\Delta t\Big|_{t_1}^{t_2} + H\Delta t\Big|_{t_1}^{t_2} \quad (75)$$

,

jika Hamiltonian H adalah kekal, atau dengan menggunakan pers.(74), pers.(75) dapat ditulis sebagai

e-ISSN : 2594-1989 https://doi.org/10.17509/wafi.v7i2.52521

$$\Delta A = \left[-\sum_i p_i \dot{q}_i + L + H \right] \Delta t \Bigg|_{t_1}^{t_2}, \tag{76}$$

sesuai dengan definisi Hamiltonian dan dengan mempertimbangkan pers.(58) untuk Hamiltonian yang kekal, maka pers.(76) berharga nol, atau

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L\,, \tag{77}$$

bersesuaian dengan pers.(51). Pers.(76) dan (77) merupakan bukti keberlakuan prinsip least action untuk keadaan sistem dengan Hamiltonian yang kekal. Untuk sistem konservatif dimana energi potensial sistem (V) tidak bergantung kecepatan, diperoleh

$$\sum_i p_i \dot{q}_i = 2T\,, \tag{78}$$

dimana T energi kinetik sistem, dengan menggunakan teorema Euler bahwa untuk fungsi f sembarang yang homogen berlaku

$$\sum_i q_i \frac{\partial f}{\partial q_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} = nf\,, \tag{79}$$

dengan n merupakan orde homogenitas fungsi f [3].

2.5. Teorema konservasi dan signifikansi arti fisis Hamiltonian

Dengan mempertimbangkan sifat-sifat simetri seperti sifat siklik sistem koordinat umum yang berlaku sama baik untuk Hamiltonian (H) maupun Lagrangian (L) memberikan indikasi bahwa teorema konservasi momentum anguler (**L**) juga berlaku atau dapat ditransformasikan ke dalam formulasi Hamiltonian dengan cara mensubstitusikan H sebagai pengganti dari L. Contoh untuk koordinat siklik adalah sebagai berikut: Jika diberikan kondisi bahwa Lagrangian suatu sistem tidak mencakup koordinat q_i meskipun dapat mencakup koordinat untuk kecepatan $\dot{q}_i$ maka koordinat yang bersangkutan disebut bersifat siklik [3]. Misalnya diberikan persamaan Lagrangian

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0\,, \tag{80}$$

karena sistem koordinat yang digunakan adalah siklik, maka suku $\partial L / \partial q_i$ tidak ada, dengan ungkapan lain koordinat q_i tidak diberikan, sehingga

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{dp_i}{dt} = 0 \text{ dan} \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i = \text{tetap}\,, \tag{81}$$

dengan demikian, sebagai teorema konservasi umum, dapat dinyatakan bahwa momentum yang tergeneralisasi yang berkonyugasi atau dapat diasosiasikan dengan sebuah koordinat siklik bersifat konservatif atau kekal. Secara khusus, hubungan sifat-sifat simetri sistem fisika dan variabel-variabel tetap dari gerak dapat diperoleh atau diturunkan dari Hamiltonian. Sebagai contoh, jika suatu sistem adalah simetris terhadap sebuah sumbu rotasi

Wahana Fisika, 7(2), 2022. 163 - 178
http://ejournal.upi.edu/index.php/wafi
e-ISSN : 2594-1989 https://doi.org/10.17509/wafi.v7i2.52521

sedemikian sehingga H adalah invarian terhadap rotasi pada sumbu tersebut, maka H bukan atau tidak merupakan fungsi sudut rotasi dan sudut rotasi tersebut merupakan sebuah contoh dari koordinat siklik dan momentum sudut **L** di dalam sistem tersebut adalah kekal. Keadaan yang sama juga berlaku untuk sistem di bawah pengaruh potensial sentral (*spherically symmetric potential*) dimana berlaku invariansi Hamiltonian dan Lagrangian terhadap simetri rotasi.

Jika L atau H secara eksplisit tidak merupakan fungsi waktu t, maka H atau L merupakan sebuah kuantitas fisis yang tetap dari gerak yang bersangkutan. Misalnya diberikan hubungan fungsional untuk Hamiltonian $H = H(q_i, p_i, t)$, maka

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t}, \qquad (82)$$

karena $\dot{p}_i = -\partial H / \partial q_i$, maka

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial t}, \qquad (83)$$

oleh karena H invarian terhadap waktu t maka $dH/dt \equiv \partial H / \partial t$ (siklik terhadap t, variabel lainnya seolah-olah tidak berpengaruh) dan suku pertama ruas kanan pers.(83) berharga nol, atau

$$\sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0, \qquad (84)$$

dimana dari pers.(77),

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \qquad (85)$$

sebagai konsekuensi kondisi siklik terhadap waktu t [3,4,5].

2.6. Mekanika Relativistik

Postulat Einstein untuk relativitas khusus [11] menyatakan bahwa, Postulat I: "*The laws by which the states of physical systems alter are independent of the alternative, to which of two systems of coordinates, in uniform motion of parallel translation relatively to each other, these alterations of state are referred* (*principle of relativity*)", dan Postulat II: "*The principle of the constancy of the velocity of light is of course contained in Maxwell's equations*". Kedua postulat mengisyaratkan keberlakuan hukum-hukum transformasi untuk dua kerangka acuan, seluruhnya adalah titik-titik acuan tidak inertial (disebut: ruang Minkowski atau pseudo-Riemannian), yang bergerak relatif dengan kecepatan tetap satu sama lain; dan independensi kecepatan cahaya c terhadap keadaan gerak pengamatnya. Jika S dan S' adalah kerangka acuan tidak inertial dengan S' bergerak ke arah sumbu x positif relatif dengan kecepatan v terhadap S, maka berlaku transformasi

$$x = ct = \gamma(x' + vt'),\ x' = ct' = \gamma(x - vt), \quad y' = y,\ z' = z, \qquad (86)$$

sehingga

Wahana Fisika, 7(2), 2022. 163 - 178
http://ejournal.upi.edu/index.php/wafi
e-ISSN : 2594-1989 https://doi.org/10.17509/wafi.v7i2.52521

$$ct' = \gamma(c-v)t\,,\; ct = \gamma(c+v)t'\,,$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \tag{87}$$

dengan γ konstanta transformasi, $\beta = v/c$ dan

$$ct' = \frac{ct-\beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ atau } ct = \frac{ct'+\beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}\,. \tag{88}$$

Jika vektor momentum 4 ruang-waktu dalam notasi kontravarian dan kovarian [7,13] masing-masing diberikan oleh

$$p^u = \left(\frac{E}{c},\mathbf{p}\right) \text{ dan } p_u = \left(\frac{E}{c},-\mathbf{p}\right), \tag{89}$$

dan operator momentum 4 ruang-waktu:

$$\hat{p}^u = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_u} = \frac{\hbar}{i}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},-\nabla\right), \tag{90}$$

dan

$$\hat{p}_u = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x^u} = \frac{\hbar}{i}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},\nabla\right), \tag{91}$$

yang bersesuaian dengan sistem koordinat

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)\,, \tag{92}$$

dan

$$x_u = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct,-x,-y,-z)\,, \tag{93}$$

dimana

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla)\,, \tag{94}$$

dan

$$\partial^\mu = g^{\mu\upsilon}\partial_\upsilon = g^{\mu\upsilon}\frac{\partial}{\partial x_\upsilon} = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},-\nabla)\,, \tag{95}$$

dengan menggunakan hubungan $dX_\nu = \sum_\sigma a_{\nu\sigma} dx_\sigma$ dan $(ds)^2 = ds^2 = \sum_{\tau\sigma} g_{\sigma\tau} dx_\sigma dx_\tau$ (Lorentz *et al.*, 1952), untuk elemen panjang ruang-waktu 4 dimensi ds, maka dari pers.(92) dan (93) diperoleh

$$g^{\mu\upsilon} = g_{\mu\upsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{96}$$

adalah tensor metrik untuk ruang Minkowski, maka produk skalar momentum 4 partikel berbentuk

$$p^u p_u = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = m_0^2 c^2\,, \tag{97}$$

dengan E energi total partikel, m_0 massa diam dan $\mathbf{p}$ vektor momentum relativistik partikel. Sedangkan jika fungsi gelombang partikel dinyatakan oleh Ψ maka dengan menggunakan substitusi

$$E \to \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \text{ dan } p \to \hat{p} = \frac{\hbar}{i}\nabla\,, \tag{98}$$

ke pers.(97) diperoleh persamaan Klein-Gordan untuk partikel tidak berspin dalam mekanika kuantum relativistik (Ryder, 1985)

$$\left(\Box + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right)\Psi = 0\,, \tag{99}$$

dimana $\mathrm{c} = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$, adalah operator Laplacian 4 ruang-waktu atau de'Alembertian. Model representasi ruang untuk fungsi gelombang partikel atau sistem partikel Ψ dapat ditemukan dalam literatur [12,14,15]. Pers.(99) juga dapat diperoleh dengan mensubstitusikan pers. (90) dan (91) ke pers.(97). Prinsip de'Alembertian pers.(9) untuk usaha akibat perubahan kecepatan relativistik partikel menjadi

Wahana Fisika, 7(2), 2022. 163 - 178
http://ejournal.upi.edu/index.php/wafi
e-ISSN : 2594-1989 https://doi.org/10.17509/wafi.v7i2.52521

$$W = \int_{v_1}^{v_2} \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} dv = \Delta m c^2 \quad , \qquad (100)$$

dengan m_0 massa diam dan Δm massa defek, menyatakan hubungan kesetaraan massa-energi yang berperan penting dalam mekanisme reaksi dan pembentukan ikatan partikel-partikel nukleonik dan sub nukleonik [9]. Gejala relativistik seperti: kontraksi panjang, pemuaian massa, dilatasi waktu, efek Doppler cahaya, paradoks kembar dan sebagainya, merupakan konsekuensi langsung dari keberlakuan postulat di atas [9,11]. Tampak bahwa hukum-hukum Newton tentang gerak mengalami perubahan bentuk akibat transformasi relativitas khusus pers.(86)-(88). Pers.(86) dapat diperluas untuk mencakup titik acuan 4 dimensi sembarang dengan menggunakan fungsi generator *infinitesimal* rotasi [16]. Jika potensial atau interaksi fundamental, misalnya: gravitasi, diterapkan dalam ruang Minkowski di atas, maka dapat diperoleh persamaan umum gerak "*geodesic*" ruang-waktu partikel dalam ruang Riemannian dan deskripsi karakteristik "*manifold*" ruang-waktu kontinuum dalam teori relativitas umum [6,8,10,11].

3. KESIMPULAN

Titik-titik acuan dalam kerangka acuan tidak inertial dapat direpresentasikan oleh titik-titik acuan inertial dalam mekanika Newtonian untuk mendeskripsikan gerak benda dengan mengasumsikan keberlakuan hukum-hukum transformasi. Teorema konservasi besaran-besaran fisis secara konsisten berlaku untuk sistem-sistem fisika konservatif dalam seluruh kerangka acuan. Postulat relativitas khusus mentransformasikan kerangka inertial dalam mekanika Newtonian kedalam kerangka tidak inertial dalam mekanika relativistik ruang Minkowski yang dapat diperluas ke dalam relativitas umum ruang Riemannian dengan menerapkan interaksi fundamental dalam ruang Minkowski dan mengasumsikan keberlakuan hukum-hukum transformasi dalam group kontinyu.

UCAPAN TERIMA KASIH

Kami mengucapkan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada Panitia Simposium Fisika Nasional dan Temu Alumni (SINAFITA), Departemen Pendidikan Fisika, FPMIPA, UPI (Tahun 2015); yang diselenggarakan dalam rangka Purnabakti Yth. Bapak Drs. I Made Padri, M.Pd., Pembina mata kuliah mekanika dan Pembimbing Skripsi/Tugas Akhir kami; atas seluruh prakarsa dan bantuan pihak Panitia tersebut, mulai dari tahap persiapan sampai pada saat presentasi sebagian materi dari tulisan ini dalam Simposium.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Born, M. (1962). *Einstein's theory of relativity*. Courier Corporation.

[2] Muslim 1998. Deduction and Application of Fictious Forces in a Rotating Frame Exploiting Dimensional and Reflection Symmetries. *Kontribusi Fisika Indonesia*. 9(1): 1-5.

[3] Goldstein, Herbert 1980. Classical mechanics. Second edition. Reading Massachusetts, USA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

[4] Lanczos, C. (2012). *The variational principles of mechanics*. Courier Corporation.

[5] Whittaker, E. T. 1964. A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies: With an introduction to the problem of three bodies. Fourth edition. London, UK: Cambridge University Press.

[6] Hawking, S. (2014). Singularities and the geometry of spacetime. *The European Physical Journal H*, *39*(4), 413-503.

[7] Ryder, L. H. (1996). *Quantum field theory*. Cambridge university press.

[8] Wald, R. M. (1984). General relativity, chicago, usa: Univ.

[9] Odishaw, H. (Ed.). (1958). *Handbook of physics*. McGraw-Hill.

[10] DeWitt, C., & DeWitt, B. (1964). Relativity, groups and topology. *Relativité*.

[11] Lorentz, H. A., Einstein, A., Minkowski, H., Weyl, H., & Sommerfeld, A. (1952). *The principle of relativity: a collection of original memoirs on the special and general theory of relativity*. Courier Corporation.

[12] Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (2013). *Quantum mechanics: non-relativistic theory* (Vol. 3). Elsevier.

[13] Wrede, R. C. (1972). Introduction to Vector-and Tensor Analysis Dover Publications. *New York*.

[14] Arifin, M., Katō, K. and Myo, T. 2005. Notes on 3-Body System. Sapporo, Japan: Nuclear Theory Group, Division of Physics, Graduate School of Science, Hokkaido University.

[15] Ping, J., Wang, F., & Chen, J. Q. (2002). *Group representation theory*

for physicists. World Scientific Publishing Company.

[16] Jackson, John David 1990. Classical Electrodynamics. Second edition. Singapore: John Wiley and Sons (SEA) Pte Ltd.