

# PENALARAN KREATIF MATEMATIS

*Aprilia Dwi Handayani*

Universitas Nisantara PGRI Kediri

## ABSTRAK

Matematika dapat dipandang sebagai cara bernalar, karena matematika memuat cara pembuktian yang sah atau valid, serta sifat penalaran matematika yang sistematis. Kemampuan penalaran merupakan salah satu dari kompetensi yang harus dimiliki oleh peserta didik. Materi matematika dan penalaran matematika merupakan dua hal yang tidak dapat dipisahkan, materi matematika dipahami melalui penalaran dan penalaran dipahami dan dilatih melalui belajar materi matematika. Dalam artikel ini akan dibahas tentang salah satu jenis penalaran menurut Lithner, yaitu penalaran kreatif. Terdapat dua jenis penalaran yang sering digunakan siswa dalam menyelesaikan tugas-tugas matematika, yaitu: Creative Reasoning (Penalaran Kreatif) dan Imitatif Reasoning (Penalaran Imitatif). Penalaran kreatif mempunyai empat kriteria, yaitu: kebaruan (*novelty*), fleksibel (*flexibility*), masuk akal (*plausible*) dan berdasar matematis (*mathematical foundation*).

**Kata Kunci:** kreatif, matematika, penalaran

## ABSTRACT

Mathematics can be seen as a way of reasoning, because mathematics contain valid way of proving, as well as the systematic nature of mathematical reasoning. Reasoning ability is one of the competencies required by learners. Mathematics and mathematical reasoning are two things that cannot be separated, the material is understood through reasoning and mathematical reasoning to understand and are trained through learning mathematics. In this article will discuss about one of the types of reasoning according to Lithner, creative reasoning. There are two types of reasoning that is often used by students in solving mathematical tasks: creative reasoning and imitative reasoning. Creative reasoning has four criteria: novelty, flexible, reasonable and mathematical foundation.

**Keywords:** creative, mathematics, reasoning

## PENDAHULUAN

Matematika merupakan bagian yang terintegrasi dari kurikulum sekolah. Tujuan matematika adalah mengajarkan keterampilan dasar, untuk membantu anak-anak belajar berpikir logis, untuk mempersiapkan siswa untuk hidup produktif dalam pekerjaan, dan untuk mengembangkan warga negara melek kuantitatif (Steen, 1999). Matematika terdiri dari beberapa komponen yang meliputi aksioma/postulat, pengertian dasar/definisi, dan dalil/teorema. Matematika dapat pula dipandang sebagai cara bernalar, karena matematika memuat cara pembuktian yang sah atau valid, serta sifat penalaran matematika yang sistematis.

Kemampuan penalaran yang tertuang dalam permendiknas No. 22 tahun 2006 tentang standar isi (SI) merupakan salah satu dari kompetensi yang harus dimiliki oleh

peserta didik. Materi matematika dan penalaran matematika merupakan dua hal yang tidak dapat dipisahkan, yaitu materi matematika dipahami melalui penalaran dan penalaran dipahami dan dilatih melalui belajar materi matematika. Kemampuan bernalar tidak hanya dibutuhkan para siswa pada saat pembelajaran matematika ataupun mata pelajaran lainnya, namun sangat dibutuhkan ketika siswa dituntut untuk memecahkan masalah dan mengambil kesimpulan dalam kehidupan sehari-hari. Melalui penalaran matematika, siswa dapat mengajukan dugaan kemudian menyusun bukti, melakukan manipulasi terhadap permasalahan (soal) matematika dan menarik kesimpulan dengan benar dan tepat.

Penalaran terkait erat dengan kehidupan sehari-hari, terutama berkaitan dengan pengambilan keputusan. Beberapa orang

membuat banyak keputusan didasarkan sepenuhnya pada intuisi dan emosi. Akan tetapi, keputusan yang lebih baik dapat dilakukan dengan mengumpulkan fakta-fakta, meminta saran, dan mempertimbangkan konsekuensi dari berbagai pilihan yang ada. Pemikiran yang merupakan penalaran dari fakta-fakta yang diketahui untuk mencapai kesimpulan logis ini merupakan pusat matematika dan sangat penting agar mampu menyelesaikan masalah di hampir semua aspek kehidupan (California High School Exit Examination (CAHSEE): Mathematics Study Guide, 2008).

### **PENGERTIAN PENALARAN MATEMATIS**

Menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia penalaran berasal dari kata dasar nalar yang berarti aktivitas yang memungkinkan seseorang berpikir logis, jangkauan pikir, atau kekuatan pikir. Sedangkan penalaran diartikan sebagai cara (hal) menggunakan nalar; pemikiran atau cara berpikir yang logis. Menurut sumber yang sama, penalaran dapat juga bermakna hal mengembangkan atau mengendalikan sesuatu dengan nalar dan bukan dengan perasaan atau pengalaman atau proses mental dalam mengembangkan pikiran dari beberapa fakta atau prinsip. Sedangkan kata matematis bermakna bersangkutan dengan matematika atau bersifat matematika.

Secara leksikal, menurut Kamus Merriam Webster, Penalaran berarti proses berpikir tentang sesuatu dengan cara yang logis untuk membentuk suatu kesimpulan atau penilaian atau dapat juga diartikan sebagai kemampuan pikiran untuk berpikir dan memahami hal-hal dalam cara yang logis. Sedangkan kata Matematis bermakna berhubungan dengan matematika, atau melibatkan matematika. Sehingga dapat diartikan secara leksikal, penalaran matematis adalah proses berpikir tentang hal-hal yang berhubungan dengan matematika dengan cara yang logis untuk membentuk suatu kesimpulan.

Beberapa pendapat terkait dengan istilah penalaran matematis diungkapkan oleh beberapa ahli. Menurut Adams (2007), Matematika itu seperti membaca, matematika

merupakan keterampilan yang penting dalam kehidupan sehari-hari. Penalaran matematika adalah sesuatu yang dilakukan semua orang, mulai dari perhitungan sederhana sampai perhitungan yang rumit. Kemampuan untuk menggunakan keterampilan penalaran sangat bervariasi (Adams, 2007).

Steen (1999) mengungkapkan bahwa orang menggunakan matematika dalam dua cara yang berbeda. Untuk menghadapi masalah standar, dengan menerapkan formula yang dikenal atau prosedur untuk memecahkan masalah-masalah sederhana. Sedangkan untuk menghadapi masalah-masalah rumit melalui strategi matematika (misalnya, menerjemahkan ke pengaturan lain, mencari pola, penalaran dengan analogi; generalisasi dan menyederhanakan; mengeksplorasi kasus-kasus tertentu, abstrak untuk menghilangkan detail yang tidak relevan.

Secara epistemologis, penalaran adalah dasar matematika. Seperti halnya ilmu pengetahuan memverifikasi melalui observasi, matematika bergantung pada logika (Steen, 1999). Penalaran Matematika dapat menunjukkan metodologi khas matematika yang berupa penalaran aksiomatik, deduksi logis, dan inferensi formal. Dalam hal yang lebih luas, penalaran dan kesimpulan dipadukan dengan analisis dan intuisi, misalnya pada materi geometri dan kuantitatif.

Menurut Permana dan Sumarmo (2007), penalaran merupakan proses berpikir dalam proses penarikan kesimpulan. Kemampuan penalaran ini harus dikuasai oleh siswa sekolah menengah. Hal ini sangat penting terkait dengan peran penalaran sebagai kemampuan dasar matematika.

Penjelasan yang tertuang dalam NCTM menyatakan bahwa penalaran matematika dan pembuktian merupakan cara kuat untuk mengembangkan dan mengekspresikan wawasan tentang berbagai fenomena. Orang-orang yang benalar dan berpikir analitis cenderung mencatat pola, struktur, atau keteraturan pada situasi dunia nyata dan benda-benda simbolis, mereka bertanya apakah pola-pola yang disengaja atau jika mereka terjadi karena suatu alasan, dan mereka dan membuktikan dugaan. Pada akhirnya, bukti matematis adalah cara formal

mengekspresikan jenis penalaran dan pembenaran tertentu.

Hal yang membedakan matematika dari sekedar penambahan informasi, atau penerapan keterampilan praktis dan prestasi memori adalah penalaran (Ralph, 2002). Penalaran matematika menggunakan struktur organisasi dimana bagian-bagian matematika terhubung satu sama lain. Kenneth Ross (dalam Ralph, 2002), menekankan tentang pentingnya penalaran matematika. Jika kemampuan penalaran tidak dikembangkan pada siswa, maka matematika yang sederhana akan menjadi masalah mengikuti serangkaian prosedur dan meniru contoh tanpa berpikir tentang mengapa hal tersebut masuk akal.

Menurut Polya ada dua jenis penalaran, yaitu: penalaran demonstratif (*demonstratif reasoning*) dan penalaran yang masuk akal (*plausible reasoning*). Dalam penalaran yang ketat, hal yang utama adalah membedakan pembuktian dari tebakan. Dalam penalaran yang masuk akal, prinsip yang utama adalah membedakan sebuah tebakan dari tebakan yang lain, membedakan tebakan yang lebih beralasan dari tebakan yang kurang memiliki alasan logis.

Dalam artikel ini, istilah penalaran matematis diartikan sebagai garis pemikiran, cara berpikir, yang diadopsi untuk menghasilkan pernyataan dan mencapai kesimpulan. Istilah penalaran tidak selalu didasarkan pada logika deduktif formal, dan bahkan mungkin tidak benar asalkan ada beberapa jenis argumen masuk akal yang memandu pemikiran (Lithner, 2006; Lithner, 2007). Penalaran tidak terbatas hanya pada pembuktian, tetapi memuat pemikiran yang dilakukan siswa (pada semua tingkat pendidikan) ketika menghadapi tugas-tugas matematika (Lithner, 2006). Pendapat Boesen (2007), penalaran diartikan sebagai garis pemikiran, cara berpikir yang diadopsi untuk menghasilkan pernyataan dan mencapai kesimpulan. Senada dengan pendapat Lithner, penalaran ini tidak selalu didasarkan pada logika deduktif, dan bahkan mungkin tidak benar, asalkan ada beberapa jenis argumen yang masuk akal (untuk penalar) yang memandu pemikirannya. Menurut Boesen, argumentasi adalah pembuktian, bagian dari

alasan yang bertujuan meyakinkan diri sendiri atau orang lain yang penalarannya sesuai.

Ketika berusaha mencari solusi dari tugas matematika yang tidak rutin, dan dihadapkan pada situasi problematis, struktur penalaran yang digunakan siswa dapat berupa:

1. pilihan strategi (mencoba untuk memilih strategi, dalam arti luas yaitu memilih, mengingat, membangun/ mengkonstruksi, menemukan, dll) yang dapat memecahkan kesulitan. Pilihan ini dapat didukung oleh argumentasi prediktif: apakah strategi tersebut dapat mengatasi kesulitan mereka.
2. Implementasi Strategi. Hal ini dapat didukung dengan argumentasi verifikatif: Apakah strategi tersebut dapat mengatasi kesulitan (Lithner, 2002).

Lithner (2006) membagi jenis penalaran yang sering digunakan siswa dalam menyelesaikan tugas-tugas matematika secara garis besar menjadi dua jenis penalaran, yaitu: Creative Reasoning (Penalaran Kreatif) dan Imitatif Reasoning (Penalaran Imitatif). Penalaran kreatif mempunyai empat kriteria, yaitu: kebaruan (*novelty*), fleksibel (*flexibility*), masuk akal (*plausible*) dan berdasar matematis (*mathematical foundation*). Sementara penalaran imitatif masih terbagi menjadi beberapa jenis penalaran, yaitu penalaran ingatan (*memorised reasoning*) dan penalaran algoritma (*algorithmic reasoning*). Pada penalaran ingatan, siswa memanggil kembali memori/ mengingat kembali jawaban. Sedangkan penalaran algoritma, siswa mengingat kembali prosedur dari cara penyelesaian.

Penelitian yang dilakukan Palm (2006) untuk menyelidiki jenis penalaran yang diperlukan dalam penilaian siswa di SMA menunjukkan bahwa hanya sebagian kecil tugas dalam tes buatan guru yang memerlukan jenis penalaran kreatif. Hasil lainnya juga menyatakan bahwa pada sebagian besar tugas yang diberikan pada siswa tidak harus menghasilkan penalaran baru dan mereka tidak harus mempertimbangkan sifat intrinsik matematika dalam menyelesaikan tugas, sehingga mereka tidak perlu pemahaman

konsep relasional dan metode yang digunakan untuk menyelesaikan tugas. Penalaran matematika yang diperlukan dalam tes buatan guru hanya penalaran superfisial (dangkal). Hal ini memungkinkan siswa berhasil untuk berhasil pada tes buatan guru dengan sebagian besar menggunakan penalaran algoritma dan penalaran ingatan yang berkontribusi terhadap efektivitas belajar relatif dalam jangka pendek dan cenderung menggunakan penalaran dangkal.

Bergqvist (2007) juga menganalisis dari 16 kuliah pengantar Kalkulus, pada empat universitas di Swedia, ditemukan bahwa sekitar 70% dari ujian dapat terselesaikan dengan penalaran yang tidak mempertimbangkan sifat intrinsik (dasar) matematika, dan 15 dari 16 ujian itu memungkinkan mahasiswa untuk lulus tanpa menggunakan penalaran kreatif. Dalam hal ini dapat diartikan bahwa 15 dari 16 ujian memungkinkan mahasiswa lulus dengan jenis penalaran dangkal

### **PENALARAN KREATIF MATEMATIS**

Ketika membahas tentang penalaran kreatif matematis, ada dua hal yang akan menjadi pertanyaan, yaitu apa yang membuat sebuah penalaran disebut sebagai penalaran kreatif dan apa yang menjadikan sebuah penalaran disebut matematis. Kreatifitas menurut Haylock (dalam Boesen, 2007) dapat diartikan dalam dua makna, yaitu: (i) pemikiran yang berbeda dan mengatasi fiksasi dan (ii) pemikiran dibalik sebuah hasil yang dianggap megah oleh sekumpulan besar orang. Pengertian kreativitas ini tidak sesuai dengan yang dibahas dalam artikel, sehingga kreativitas yang dimaksudkan dalam artikel ini adalah adanya aspek masuk akal (*plausibility*) dan berdasar matematis (*mathematical foundation*). Sifat dari suatu komponen disebut matematis jika hal tersebut dapat diterima oleh masyarakat matematika sebagai hal yang benar. Karena sifat dari komponen mungkin lebih kurang relevan dalam konteks dan situasi problematis, maka perlu dibedakan antara sifat intrinsik (*intrinsic properties*) yang merupakan pusat penalaran dan sifat permukaan (*surface properties*) yang

hanya sedikit atau tidak mempunyai relevansi dengan situasi khusus (Boesen, 2007).

Penalaran kreatif matematis didasarkan didefinisikan melalui kebaruan (*novelty*), fleksibel (*flexibility*), masuk akal (*plausible*) dan berdasar matematis (*mathematical foundation*). Sebuah penalaran disebut sebagai penalaran kreatif matematis jika memenuhi kondisi sebagai berikut:

#### 1. Kebaruan (*novelty*)

Dalam penalaran kreatif, suatu rangkaian solusi yang baru (bagi penalar) diciptakan dalam pemecahan masalah atau rangkaian solusi yang telah dilupakan, diciptakan kembali. Jawaban yang hanya mencontoh dari prosedur penyelesaian tidak termasuk ke dalam jenis penalaran kreatif.

#### 2. Fleksibel (*flexibility*).

Menggunakan pendekatan yang berbeda dan diadaptasi untuk situasi permasalahan yang sesuai.

#### 3. Masuk akal (*plausible*)

Terdapat argumen yang mendukung pilihan dan penerapan strategi sehingga menguatkan alasan bahwa kesimpulan yang diberikan benar atau masuk akal. Dalam hal ini, menebak jawaban tidak diperbolehkan.

#### 4. berdasar matematis (*mathematical foundation*).

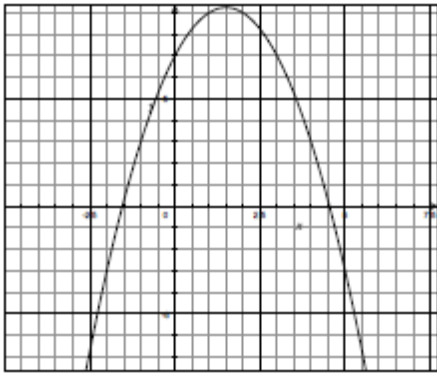
Argumentasi yang diberikan oleh penalar ada dalam sifat-sifat intrinsik matematis dari komponen yang termuat dalam penalaran.

### **CONTOH PENALARAN KREATIF MATEMATIS**

Berikut disajikan sebuah contoh jenis jawaban siswa yang menggunakan penalaran kreatif matematis. Contoh ini merujuk pada hasil penelitian Lithner (2006:10).

Seorang siswa bernama Anne mengerjakan soal latihan 1, yaitu: Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum untuk fungsi  $y = 7 + 3x - x^2$  pada interval  $[-1,5]$ . Anne menggambar grafik fungsi tersebut

dengan menggunakan kalkulator, hasilnya sebagai berikut:



Anne mengatakan “Saya melihat fungsi  $x^2$  (polinomial berpangkat dua) dapat terlihat seperti lembah jika  $+x^2$  dan seperti bukit jika  $-x^2$ . Saya melihat nilai minimumnya pada batas akhirnya, yaitu pada  $x=5$ ”. Anne melihat bahwa fungsi maksimumnya kemungkinan berada pada  $x=1.5$ , tetapi tidak dapat menentukan nilainya berdasarkan grafik. Anne kemudian menghitung nilai berapa fungsi pada titik-titik yang mendekati  $x=1.5$ .

Selanjutnya Anne mengatakan “kami telah mempelajari tentang turunan, dan itu menyatakan gradien garis singgungnya. Nilai maksimum terletak pada titik dimana gradien garis singgungnya adalah nol. Saya memikirkan bahwa turunan dari  $x^2$  adalah fungsi  $x$ ”. Anne dengan mudah menghitung  $y' = 3 - 2x$  dan  $y'$  akan bernilai nol pada titik  $x=1.5$  dan menghitung  $y(1.5)=9.25$ . Anne menyimpulkan bahwa nilai tersebut sesuai dengan grafik yang terlihat di kalkulatornya.

Dari contoh tersebut, dapat dilihat bahwa pemikiran Anne merupakan penalaran kreatif matematis.

#### 1. Kebaruan

Anne menggunakan konsep turunan dalam menyelesaikan soal, tetapi belum melihat algoritma untuk mendapatkan nilai maksimum yang dibangun melalui pilihan strategi kunci: Nilai maksimum terletak pada puncak dimana nilai turunannya adalah nol, dan itu bisa dihitung. Dari proses ini, Anne tidak hanya mengikuti prosedur algoritma yang diberikan oleh orang lain.

#### 2. Fleksibel

Anne dapat mengambil inisiatif untuk menganalisis situasi dan mengadaptasi ke dalam kondisinya, hal ini merupakan inisiatif yang tidak lazim diantara para siswa yang hanya berfokus pada pendekatan algoritmik.

#### 3. Masuk akal

Anne mempunyai argumen berdasar matematis yang masuk akal tentang pilihan strategi dan kesimpulannya.

#### 4. Berdasar matematis.

Anne dapat mengembangkan pengertian konsep yang bagus tentang fungsi dan sifat intrinsiknya, yaitu relasi antara konsep turunan, gradien dan nilai maksimum.

### KESIMPULAN

Penalaran yang sering digunakan siswa dalam menyelesaikan tugas-tugas matematika yang diberikan secara garis besar terbagi menjadi dua jenis, yaitu penalaran kreatif dan penalaran imitatif. Penalaran kreatif mempunyai empat kriteria, yaitu: kebaruan (*novelty*), fleksibel (*flexibility*), masuk akal (*plausible*) dan berdasar matematis (*mathematical foundation*).

### DAFTAR PUSTAKA

- Adams, J.W. (2007). Individual differences in mathematical ability: genetic, cognitive and behavioural factors. *Journal of Research in Special Educational Needs* Volume 7 Number 2 page 97–103
- Bervqvist, T., Lithner, J., and Sumpter, L. (2002). *Reasoning Characteristics in Upper Secondary School Students' Task Solving*. Artikel : [On line]. Tersedia
- Bervqvist, E. (2007). *Types of Reasoning Required in University Exams in Mathematics*. Artikel: [On line]. Tersedia
- Boesen, J. (2007). *Why Emphasise Imitative Reasoning? Teacher-made Test*. Departemen of Mathematics Umea University.

- Lithner, J. (2006). A Framework for Analysing Creative and Imitative Mathematical Reasoning. Artikel: [Online]. Tersedia:
- Palm, T., Boesen, J., and Lithner, J. (2006). *The Requirements of Mathematical Reasoning in Upper secondary Level Assessments*
- Permana, Y., dan Sumarmo, U. (2007). Mengembangkan Kemampuan Penalaran dan Koneksi Matematik Siswa SMA Melalui Pembelajaran Berbasis Masalah. *Educationist: Vol 1 No.2 hal 116-123*
- Polya, G. *Mathematics and Plausible Reasoning. Volume 1*
- Raimi, R. (2002). *Part 2 of A Mathematical Manifesto*. Online. Tersedia: [NYC HOLD](http://nychold.com/raimi-reason02.html). <http://nychold.com/raimi-reason02.html>
- Steen, L.A. (1999). *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*. National Council of Teachers of Mathematics, pp. 270-285.