

MENGATASI KESULITAN MAHASISWA KETIKA MELAKUKAN PEMBUKTIAN MATEMATIS FORMAL

Cecep Anwar HF Santosa

Program Studi Pendidikan Matematika
Universitas Sultan Ageng Tirtayasa, Banten

ABSTRAK

Melakukan pembuktian matematis formal merupakan hal yang sentral dalam matematika. Ketika seseorang mempunyai dugaan tentang suatu hal, salah satu cara yang paling tepat untuk meyakinkan bahwa hal tersebut benar adalah dengan melakukan pembuktian matematis yang sah. Proses mendefinisikan pembuktian ini berkembang dari masa ke masa sesuai dengan perkembangan jaman. Walaupun belum ada konsensus yang disepakati oleh matematikawan secara keseluruhan tentang apa itu bukti matematis formal, namun proses membuktikan ini merupakan suatu masalah tersendiri ketika bukti matematis dikenalkan saat pembelajaran berlangsung. Kesulitan ini terjadi tidak hanya pada mahasiswa tingkat pertama perkuliahan, namun ternyata mahasiswa program yang lebih tinggi (pascasarjana) pun mengalami kesulitan dalam membuktikan walaupun dengan porsi yang lebih kecil. Jika ditelusuri proses berpikir pembuktian matematikawan ternyata sangat berbeda dengan alur berpikir yang disajikan pada buku-buku teks matematika saat ini. Sehingga terdapat masalah ketika mahasiswa melakukan proses pembuktian. Tulisan ini mencoba untuk menjelaskan pembuktian matematis secara komprehensif dimulai dari sejarah pembuktian sampai dengan masa kini, dan mengeksplorasi kesulitan-kesulitan pembuktian yang telah diteliti oleh para peneliti. Tulisan ini pun mencoba untuk mendiskusikan suatu cara yang paling baik yang dapat dilakukan untuk mengatasi kesulitan ketika mahasiswa dihadapkan pada proses membuktikan. Dimulai dari aspek kognitif, afektif, dan *commognition*.

Kata Kunci: afektif, aspek kognitif, bukti formal, *commognition*

ABSTRACT

Doing formal mathematical proof is central in mathematics. When someone has a conjecture about something, one of the most appropriate ways to ensure that we do the right thing is to do a legitimate mathematical proof. The process of defining formal mathematics proof is changing from time to time in accordance with the changing times. Although there has been no consensus reached by mathematicians as a whole about what the formal proof, but the process of proving is another issue when mathematical proof introduced during the learning. This difficulty occurs not only in the first years student in undergraduate, but it turned out to graduated student have difficulty proving although with smaller portions. If we try to trace mathematicians' process to do prove, we can see that it turned out very different from the logic presented in mathematics textbooks today. This paper tries to explain in a comprehensive mathematical proof starts from the historical of proofing to the present, and explores the difficulties of proof which has been studied by researchers. This paper attempts to discuss the best way to solve the difficulties when students are faced with proving process. Starting from the cognitive, affective, and *commognition*

Keyword: affective, cognitive aspect, *commognition*, formal proof

PENDAHULUAN

Kemampuan pembuktian matematis formal merupakan kemampuan yang perlu dimiliki oleh mahasiswa matematika dan pendidikan matematika. Kemampuan ini penting tidak hanya untuk melatih kemampuan berpikir mahasiswa, namun untuk mengetahui alur berpikir matematika

dan lebih jauh lagi untuk ikut mengembangkan matematika sebagai sebuah disiplin ilmu.

Dalam mencapai kemampuan untuk membuktikan suatu permasalahan dalam matematika diperlukan pemahaman dan konsep dasar matematika yang baik. Adapun faktor untuk meningkatkan pemahaman dan

konsep dasar matematika, seseorang harus memiliki kemampuan bahasa matematika yang baik pula. Hal ini sesuai dengan pernyataan Gowers dan Jamison (2000) bahwa membuat struktur dan sintak dari bahasa matematika dengan jelas dan eksplisit dapat meningkatkan pemahaman dan konsep dasar matematika.

Yerizon (2011), NCTM (2000) menyatakan bahwa proses pembelajaran matematika membutuhkan kemampuan kognitif tingkat tinggi, menghasilkan argumentasi logis dan mempresentasikan pembuktian formal yang secara efektif menjelaskan penalaran mereka. Kemampuan kognitif dalam membuktikan mencakup kemampuan analisis, sintesis, dan evaluasi, tidak hanya sekedar ingatan pengetahuan faktual ataupun aplikasi sederhana dari berbagai formula atau prinsip. Mahasiswa diharapkan mampu untuk bernalar dengan baik dan mengekspresikan hasil penalarannya secara tertulis, sistematis, dan ketat (*rigorous*). Kegiatan ini terjadi ketika melakukan proses pembuktian (Yerizon, 2011).

Mengembangkan argumentasi logis sebuah pembuktian adalah suatu cara alami berpikir melalui pemberian suatu masalah. Sebagai contoh, seorang guru mengajukan suatu permasalahan menemukan empat bilangan bulat berurutan yang jumlahnya 144. Siswa mencoba menyelesaikan dan menyatakan bahwa ini merupakan hal yang tidak mungkin. Guru merespon, "Baiklah, jadi anda tidak dapat menemukan bilangan-bilangan tersebut. Bagaimana anda tahu bahwa pasti orang lain pun tidak akan menemukannya?" Kemudian siswa tersebut berusaha menyelesaikannya beberapa menit, dan seseorang berkata, "Perhatikan, misalkan bilangan pertama tersebut adalah n , tiga bilangan selanjutnya adalah $n+1$, $n+2$, dan $n+3$. Tambahkan keempatnya dan hasilnya adalah 44. Sehingga diperoleh $4n+6=44$, dan solusinya adalah $n = 9 \frac{1}{2}$. Artinya tidak ada bilangan bulat yang memenuhi." Disini pekerjaan membuktikan siswa sangat baik untuk menjelaskan bahwa tidak ada bilangan bulat yang memenuhi. Pada saat tersebut seorang guru membantu siswa untuk berpikir bagaimana caranya menumbuhkan

kemampuan membuktikan mereka (NCTM, 2000).

Martin dan Harel (1989), Moore (1994), dan Epp (2003) melakukan penelitian terhadap mahasiswa matematika yang mengalami kesulitan dalam mengkonstruksi, memahami, dan melakukan validasi pembuktian. Martin dan Harel (1989) menemukan bahwa sebanyak 52% mahasiswa matematika dalam pembelajaran menerima sebuah argumen yang keliru sebagai sebuah bukti dari pernyataan yang tidak *familiar*. Moore (1994) melakukan observasi bahwa beberapa mahasiswa pada kuliah transisi yang sebelumnya mengambil kuliah tingkat atas yang menuntut pembuktian, hampir semua mahasiswa menyatakan bahwa mereka telah bersandar pada menghafalkan bukti sebab mereka tidak pernah sama sekali memahami apa itu bukti maupun bagaimana cara menuliskannya. Sedangkan Epp (2003) menyatakan bahwa mahasiswa "miskin" akan pembuktian matematika dan usaha menuliskan bukti tersebut.

Beberapa penelitian pun menyatakan bahwa beberapa mahasiswa hanya dapat menuliskan bukti hanya pada beberapa level pembuktian. Penelitian ini dilakukan oleh Van Dormolen (1977) yang mendefinisikan bahwa terdapat tiga level pembuktian, yaitu level dasar (*ground level*), level pertama (*first level*), dan level kedua (*second level*). Selain Van Dormolen, Balacheff (1988) pun mendefinisikan level pembuktian yang serupa: *naïve empiricism*, *crucial experiment*, *generic example*, dan *thought experiment*. Begitupun Harel and Sowder (2003), Knuth (2002), Martin and Harrel (1989), Almeida (2003) melakukan hal yang serupa

Tentunya orang-orang yang sukses memiliki kemampuan membuktikan matematika dulunya merupakan seorang pembelajar (siswa/mahasiswa). Mereka dapat memiliki kemampuan tersebut tentunya melakukan suatu proses pembelajaran baik di suatu lembaga ataupun lainnya. Artinya kemampuan membuktikan matematika seharusnya dapat dimiliki oleh mahasiswa jika kita dapat mereplikasi cara matematikawan membuktikan matematika. Sehingga pertanyaan yang muncul adalah bagaimana

para matematikawan bisa memiliki kemampuan tersebut? Apakah sebenarnya metode yang mereka lakukan? Pertanyaan tersebut tentunya harus bisa dijawab oleh setiap orang yang mengajarkan matematika. Apa yang harus dilakukan? Sekarang kita telah melakukan apa untuk mengatasi masalah tersebut?

Almeida (2003) dan Sriraman (2004) menyatakan bahwa proses pembuktian matematis yang dilakukan matematikawan sangat berbeda dengan logika yang ada di buku teks dan apa yang diajarkan di kelas. Almeida (2003) menyatakan bahwa serangkaian proses untuk memahami matematika (intuisi, *trial* dan *error*, spekulasi, dugaan, bukti) yang dilakukan matematikawan lebih banyak berbeda diajarkan kepada siswa/mahasiswa. Saat ini secara tradisional diajarkan kepada siswa/mahasiswa adalah mengenalkan teorema, bukti, dan kemudian contoh. Maksudnya bahwa proses pembuktian yang dilakukan oleh para matematikawan, tentunya merupakan suatu proses yang meliputi proses intuisi, *trial* dan *error*, spekulasi, dugaan, dan kemudian pembuktian, namun ketika pembuktian itu diajarkan kepada siswa/mahasiswa kita lebih memfokuskan kepada mengenalkan teorema, membuktikannya, dan kemudian memberikan contoh yang terkait dengan teorema tersebut. Artinya terdapat proses, alur berpikir, dan kegiatan-kegiatan lain yang dilakukan oleh matematikawan yang telah mampu membuktikan matematika tidak sepenuhnya dipahami oleh mahasiswa kita. Sesuai dengan hal tersebut, proses meningkatkan kemampuan pemahaman pembuktian formal matematis (teori dan strategi mengajar) sangat terbuka untuk diteliti yang pada gilirannya akan meningkatkan kemampuan mahasiswa terhadap pembuktian matematis formal.

Dari paparan singkat di atas, artinya bahwa kemampuan pembuktian matematis merupakan kemampuan yang penting dimiliki oleh mahasiswa matematika dan pendidikan matematika. Namun terdapat masalah dalam proses dan hasil dari upaya membuktikan pernyataan matematika.

Tulisan ini mencoba untuk menggali upaya mengatasi kesulitan yang dihadapi mahasiswa dalam melakukan pembuktian. Artinya akan dicoba dijelaskan sebab kesulitan dan bagaimana cara untuk mengatasinya.

EVOLUSI BUKTI MATEMATIKA

Sebelum lebih jauh mengidentifikasi sebab dan cara mengatasi kesulitan membuktikan matematis, akan dijelaskan terlebih dahulu sejarah dari pembuktian

Jika kita tarik ke masa lalu sejarah pembuktian matematika, tentunya kita tidak akan terlepas dari sejarah matematika. Tujuan dari melakukan tinjauan sejarah adalah untuk mencoba melihat perubahan pandangan dari proses membuktikan sepanjang sejarahnya.

Kleiner (1991) menyatakan bahwa gagasan pembuktian itu bukanlah hal yang absolut. Matematikawan memandang bahwa apa yang mendasari keterterimaan bukti semakin meningkat. Masih menurut Kleiner (1991) matematika *rigor* mirip seperti memakai pakaian, gayanya hendaknya disesuaikan dengan kesempatan tertentu, hal ini akan mengurangi kenyamanan dan menghalangi kebebasan bergerak jika terlalu longgar atau terlalu ketat. Dari dua pernyataan Kleiner tersebut bisa kita katakan bahwa standar dari *kerigoran* dari bukti matematika dapat berubah-ubah dan tidak harus dari yang kurang *rigor* menuju ke yang lebih *rigor*. Pada bagian ini kita akan mencoba menelusuri secara ringkas evolusi tersebut.

Di mulai pada masa Babylonia (sekitar 2000 SM), pada masa ini matematika berkembang sangat menakjubkan, namun kurang mengenal konsep pembuktian. tidak terdapat pernyataan umum pada matematika Babylonia dan tidak ada usaha untuk membuatnya deduktif, atau tidak ada validitas dari hasil yang diperoleh. Matematika pada masa ini menjadi landasan bagi konsep matematika Yunani yaitu munculnya konsep teorema dan konsep dari sebuah bukti.

Pandangan pembuktian berubah pada masa Yunani. Orang Yunani mempelajari aksioma-aksioma dan menghasilkan teorema-

teorema yang merupakan hasil kerja keras yang dikembangkan dalam buku karya Euclid, *Elements* (unsur-unsur). Euclid mendesain sebuah struktur logika yang didasarkan pada sebuah kumpulan aksioma-aksioma yang didefinisikan sebagai kumpulan pernyataan yang tidak didasarkan pada aksioma yang lain. Euclid menggambarkan sebuah sistem geometris yang seluruhnya berdasarkan pada aksioma-aksioma yang dibangunnya. Periode panjang ini masih sedikit aktivitas yang menekankan pada kerigoran (dari validitas bukti) (Kleiner, 1991).

Era selanjutnya adalah era notasi simbolik. Dikembangkannya teori fungsi kompleks oleh Riemann, Weierstrauss, dan Cauchy. Selama masa ini menjadi jelas bahwa bukti-bukti Euclid secara actual mengandung argumentasi yang didasarkan pada asumsi-asumsi yang tidak tertulis. Sebagai hasilnya matematikawan seperti David Hilbert (1862-1943) berusaha untuk membuat suatu sistem matematika (sistem aksiomatik) yang lengkap dan tidak *overlap* antara satu aksioma dengan aksioma lainnya. Hilbert menuliskan secara eksplisit semua aksioma yang diperlukan untuk membuat landasan yang kuat.

Selanjutnya pada tahun 1930-an, matematikawan lain seperti Borel, membuat bukti matematika dari sudut pandang yang lebih formal. Dikembangkannya beberapa buku-buku teks seperti Teori Himpunan, Aljabar, Topology, Fungsi bilangan riil satu peubah, Topologi ruang vektor, dan Pengintegralan (Borel, 1998 dalam Vanspronsen, 2008).

Pada masa yang hampir bersamaan, di awal abad 20, berkembang tiga filsafat matematika yang berbeda, yaitu formalisme, logisisme, dan intuisionisme. Ketiganya sejatinya merupakan formalis, namun memiliki perbedaan pandangan. Formalisme lebih pada permainan simbol dalam pembuktian, logisisme memandang bahwa matematika harus bisa diterima sebagai bentuk-bentuk logika, dan intuisionis lebih menyatakan bahwa matematika harus bisa dikonstruksi oleh akal budi manusia. Menurut Hanna (1991), ketiganya memandang bahwa matematika dan bahasa matematika merupakan entitas yang terpisah, matematika

adalah aktivitas yang mengandung konstruksi intropektif daripada aksioma-aksioma dan teorema-teorema.

Pandangan-pandangan ini setidaknya membawa perubahan pada kurikulum pembelajaran matematika, yaitu dengan adanya kurikulum Matematika Baru (*New Math*) di Amerika Serikat sekitar tahun 1960-an. Intinya kurikulum SMP akan lebih baik jika dikenalkan sistem yang formal dan *rigor*. *New Math* ini mendapatkan respon sekitar tahun 1970-an dengan adanya gerakan *back to basic* (Ruseffendi, 2006). Kurikulum pada periode waktu ini difokuskan pada kemampuan prosedural untuk matematika dasar (kembali kepada kemampuan menghitung). Kemudian beralih kepada isu mengenai kemampuan pemecahan masalah (*problem solving*) dan berpikir kritis (*critical thinking*) yang dimulai pada akhir 1970 dan awal 1980.

Masalah pembuktian pun menjadi perhatian NCTM (1989, 2000). Namun paradigmanya bergeser ke kemampuan pemecahan masalah dan berpikir kritis. Pada NCTM (2000), ruang lingkup menuliskan bukti dikembangkan kepada semua level pendidikan, dari mulai pre-K (pra-TK) sampai kelas 12 (SMA). Sebagai tambahan, sebuah perubahan terjadi sehingga siswa di sekolah menengah atas harus berhadapan dengan konstruksi bukti yang lebih sulit. Pada saat yang sama definisi NCTM mengenai bukti bergeser dari argumen-argumen yang ketat dan *rigor*. Menurut NCTM (2000:341) anak Pra-TK sampai kelas 12 siswa harus dapat mengenal penalaran dan bukti sebagai aspek dasar dari matematika, membuat dan menginvestigasi konjektur matematika, mengembangkan dan mengevaluasi argumen-argumen dan bukti matematika, memilih dan menggunakan berbagai tipe penalaran dan metoda pembuktian.

Pengembangan komputer pun ternyata memainkan peranan dalam pembuktian, menurut Hanna (1995) dalam Vanspronsen (2008) terdapat beberapa ide baru pembuktian, diantaranya adalah *zero-knowledge proof* dan *holographic proof*. Salah satu kegunaan komputer dalam membuktikan adalah bukti dari teorema

empat-warna (merupakan permasalahan diskrit) oleh Appel dan Haken pada tahun 1976. Komputer dengan kemampuannya untuk menghitung dengan cepat dan tanpa lelah memeriksa berbagai kemungkinan yang sangat sulit jika dikerjakan dengan tangan. Namun tentunya cara seperti ini tidak sepenuhnya diterima oleh matematikawan, mereka meragukan bahwa komputer dapat mengambil alih peran dalam pembuktian. Isu keterterimaan ini (*social acceptance*) menjadi isu yang penting dalam proses dan hasil membuktikan matematika.

Pada tahun yang sama (1976), Michael Rabin, juga mengajukan tipe lain dari membuktikan matematika, yang dinamakan *probabilistic proof* (Kleinner, 1991). Dia menemukan cara cepat untuk menentukan pembuktian, dengan menghitung peluang kesalahan sehingga minimal (misalkan 10^{-12}). Bukti yang diajukan oleh Rabin tersebut pun tidak sepenuhnya diterima oleh sebagian matematikawan, namun hal ini memberikan pandangan baru tentang pembuktian matematika dengan menggunakan komputer dan teori baru tentang pembuktian.

Dari paparan di atas, dapat kita ambil kesimpulan bahwa pembuktian matematika berkembang dari masa ke masa. Artinya pandangan tentang menuliskan bukti matematika dan keterterimaan dari pembuktian tersebut bukanlah suatu hal yang tetap, namun berubah dan mengalir sesuai dengan perubahan dunia di sekitarnya.

PEMBUKTIAN MASA KINI

Definisi tepat tentang bukti formal matematis sepertinya belum ada atau setidaknya terdapat perbedaan tergantung sudut pandang tertentu. Untuk memberikan gambaran tentang definisi bukti, berikut akan dituliskan beberapa definisi bukti formal:

Kassios (2009) menyatakan bahwa bukti formal bukanlah sebuah argument bahasa natural. Hal ini adalah perhitungan yang mengikuti aturan-aturan yang tepat. Hal ini merupakan inti dari metode formal. Sebagai pengganti dari penggunaan bahasa natural (informal) untuk alasan tentang kebenaran suatu program (pernyataan), digunakan

notasi-notasi formal yang *rigor* (ketat), tidak ambigu (jelas), dan dapat diperiksa secara mekanis.

Hanna (2004) dalam Vanspronsen (2008) menyatakan bahwa bukti matematis diperoleh dari sekumpulan pernyataan eksplisit (seperti aksioma, prinsip-prinsip yang diterima, atau hasil yang sudah dibuktikan sebelumnya) kemudian menggunakannya, dengan menerapkan prinsip-prinsip logika untuk membentuk sebuah argument deduktif yang sah.

Hanna dan Barbeau (2002) dalam Vanspronsen (2008) menyatakan bahwa bukti adalah serangkaian jumlah hingga dari langkah-langkah logika dari apa yang diketahui menuju sebuah kesimpulan menggunakan aturan-aturan inferensia.

Weber (2005) menyatakan bahwa konstruksi bukti matematika merupakan sebuah tugas matematika yang mana mahasiswa disediakan beberapa informasi awal (asumsi, aksioma, definisi) dan diminta untuk menerapkan aturan inferensia (menggunakan fakta-fakta sebelumnya, menerapkan teorema) sampai diperoleh kesimpulan yang diharapkan.

Dari beberapa definisi bukti tersebut dapat kita tentukan ciri-ciri dari bukti formal, yaitu; notasi yang digunakan menggunakan notasi-notasi formal (melibatkan variabel, operator, \wedge , \vee , \neg , \leftrightarrow , \rightarrow , tanda kesamaan "=", pengkuantifikasi " \forall ", " \exists "); logika yang dibangun harus ketat (*rigor*), tidak ambigu, menerapkan dan menggunakan prinsip logika (inferensia), dapat divaliditas secara mekanistik; dan yang terakhir adalah cara pembuktian diperoleh dari sekumpulan pernyataan eksplisit (aksioma, definisi) dan pernyataan yang sudah terbukti sebelumnya.

KESULITAN MAHASISWA DALAM MEMBUKTIKAN

Walaupun belum terdapat konsensus final dari definisi bukti matematis, namun yang dirasakan oleh semua pihak yang bergelut di dunia matematika dan pendidikan matematika, bahwa proses mengkonstruksi

bukti dan menuliskan bukti matematis merupakan masalah tersendiri.

Beberapa penelitian yang membahas kesulitan bukti ini diantaranya oleh Moore (1994). Moore melakukan penelitian dari 16 mahasiswa sarjana, 8 diantaranya adalah mahasiswa matematika, 6 diantaranya adalah mahasiswa pendidikan matematika, dan 2 mahasiswa adalah mahasiswa yang telah lulus sarjana. Temuan penelitian Moore adalah terdapat tujuh kesulitan yaitu:

- D1. Mahasiswa tidak mengetahui definisi dan mereka tidak dapat menyatakan definisi.
- D2. Mahasiswa mempunyai sedikit pemahaman intuitif dari konsep
- D3. Gambar konsep mahasiswa tidak memadai untuk melakukan pembuktian.
- D4. Mahasiswa tidak dapat atau tidak ingin membangun dan menggunakan contoh mereka sendiri.
- D5. Mahasiswa tidak mengetahui bagaimana menggunakan definisi untuk menentukan keseluruhan struktur pembuktian.
- D6. Mahasiswa tidak mampu mengerti dan menggunakan bahasa dan notasi matematika.
- D7. Mahasiswa tidak tahu bagaimana cara memulai bukti.

Masih menurut Moore (1994) sulitnya mahasiswa dalam membuktikan pun tidak hanya karena kurangnya pengetahuan terhadap konten materi. Kadangkala mahasiswa mengetahui definisi dan dapat menjelaskannya secara informal namun tidak dapat menggunakan definisi untuk menuliskan bukti (D5). Moore pun menyatakan bahwa sumber kesulitan itu disebabkan oleh tiga aspek, yaitu pemahaman konsep (definisi, gambar, dan kegunaan), kekurangan pengetahuan logika dan metode pembuktian, juga keterbatasan dari bahasa dan notasi. Mahasiswa pun lebih fokus pada prosedur dibandingkan konten. Lebih jauh lagi, mahasiswa menyadari bahwa mereka lebih menghafal bukti karena mereka tidak mengerti apa itu bukti dan bagaimana menuliskannya.

Baker (1996) dalam Vanspronsen (2008) pada penelitiannya terhadap 40 siswa SMA dan 13 mahasiswa menemukan bukti bahwa siswa dan mahasiswa hanya fokus kepada

prosedur dibandingkan konten. Mereka lebih fokus pada bentuk dibandingkan pemahaman konsep yang harus ada dalam pembuktian. Hanya 4 mahasiswa dan 5 siswa SMA yang membuat referensi tertulis dalam menuliskan bukti terhadap apa yang mereka tunjukkan sebagai bukti. Artinya mahasiswa hanya memfokuskan perhatian kognitif mereka pada prosedur dibandingkan pada konsep atau aplikasinya. Baker menyatakan bahwa kesulitan itu disebabkan lebih karena kurangnya pengetahuan konten matematika.

Mingus and Grassl (1999) dalam Vanspronsen (2008) dalam sebuah penelitian pada 30 calon guru dan 12 guru matematika sekolah menengah menemukan fakta bahwa kurangnya pengetahuan atau pengalaman bukan satu-satunya masalah, namun perlu paparan berulang-ulang kepada siswa untuk mendapatkan kepercayaan yang merupakan masalah yang krusial. Penelitian ini diawali dengan mengeksplorasi keyakinan dalam pembuktian, pengalamannya dalam membuktikan, dan keyakinan mereka tentang aturan pembuktian dalam matematika dan mengajar. 69% calon guru sekolah menengah menyatakan bahwa pembuktian seharusnya diajarkan jauh sebelumnya, jika mungkin di kelas 10, karena hal ini yang menurut mereka menjadikan pembuktian matematika merupakan hal yang sulit dilakukan ketika sekolah menengah atas dan bahkan di tingkat perguruan tinggi.

Weber (2011) melakukan penelitian pada 4 mahasiswa sarjana dan 4 mahasiswa program doctoral yang menunjukkan fakta bahwa mereka mengalami kesulitan dalam pembuktian khususnya pada tujuh proporsi homomorfisme. Hasilnya adalah mahasiswa program doktor mencapai hasil yang mendekati sempurna sekitar 95% berhasil dibuktikan. Pada mahasiswa sarjana hanya mampu membuktikan 30% proposisi yang diberikan. Kesulitan dikarenakan oleh kemampuan dan pengetahuan memilih fakta dan teorema untuk diterapkan.

Remillard (2010) menyatakan bahwa kesulitan mahasiswa berhubungan dengan pembuktian matematika sudah banyak diteliti, isu tentang prosedur, konsep, dan komunikasi selalu menjadi isu dalam membahas kesulitan

membuktikan matematis. Mahasiswa bergelut dengan proses memahami konstruksi bukti dan ketepatan dalam menuliskan bukti matematis, begitupun dengan aturan logika dalam konstruksi bukti.

Fakta-fakta yang telah diungkapkan dalam berbagai penelitian tersebut tentunya menjadikan informasi dan menambah pemahaman kita dalam memahami bagaimana kesulitan yang terjadi ketika mempelajari bukti matematis dan sebagai konsekuensinya bagaimana cara yang paling baik untuk mengajarkan bukti matematis.

Dari penelitian-penelitian tersebut terdapat beberapa penyebab dari kegagalan atau ketidaksempurnaan mahasiswa ketika melakukan pembuktian, yaitu berkaitan dengan beberapa variabel, diantaranya

1. Kurangnya pemahaman konsep
2. Kurangnya pengetahuan logika dan metode pembuktian
3. Keterbatasan mahasiswa dalam memahami bahasa dan notasi matematika
4. Kemampuan dan pengetahuan memilih fakta dan teorema untuk diterapkan
5. Aspek afektif berupa keyakinan dalam membuktikan

Bagaimana mengatasi kelima penyebab tersebut? Seperti disinggung di awal tulisan ini, tentunya proses pembuktian yang dilakukan mahasiswa ketika belajar mengajar di kelas berbeda dengan proses pembuktian yang dilakukan oleh matematikawan yang sudah berhasil memiliki kemampuan membuktikan matematis.

Untuk mengetahui bagaimana matematikawan melakukan bukti, Sriraman (2004) melakukan penelitian kepada 5 matematikawan, dalam melakukan pembuktian para matematikawan tersebut terlibat dalam interaksi sosial, melakukan perumpamaan (*imagery*), intuisi dan kemampuan heuristik seringkali mengawali konstruksi pembuktian. Sriraman menyatakan bahwa pendekatan matematikawan untuk melakukan pembuktian sangat berbeda dengan pendekatan logika yang dipresentasikan oleh kebanyakan buku-buku teks. Dalam melakukan validasi bukti, matematikawan melakukan banyak macam

strategi. Termasuk di dalamnya adalah penalaran formal, pengkonstruksian bukti yang *rigor*, penalaran deduktif informal, dan penalaran berbasis contoh. Begitu pula kemampuan konseptual matematikawan, domain pembuktian matematis, dan status bukti merupakan faktor yang penting dalam melakukan validasi.

Sfard (2002, 2008) dalam Remillard (2010) mengungkapkan suatu gagasan *commognition* atau pendekatan komunikasi terhadap aspek kognitif. Menampilkan aspek teoritik dan pandangan penelitian tentang hal tersebut. Ringkasnya, akar pendekatannya adalah pada psikologi sosial budaya. Sebagai ganti dari berfokus kepada aspek yang sulit diukur seperti skema mental siswa, Sfard berfokus pada sesuatu yang dapat dilihat perubahannya, yaitu konteks sosial.

Dalam membuktikan matematis, mahasiswa perlu berinteraksi antar mereka dan berinteraksi aktif dengan pengajarnya. Sehingga ketika pembelajaran di kelas dengan membuat diskusi grup kecil diyakini dapat membantu mahasiswa dalam proses membuktikan, dimana terdapat interaksi-interaksi yang alami dan menyenangkan. Hal ini ternyata dapat meningkatkan kemampuan mahasiswa dalam membuktikan dibandingkan mereka bekerja sendiri-sendiri.

Disamping itu, Vanspronsen (2008) menyatakan bahwa strategi individu juga merupakan hal yang penting dalam melakukan pembuktian. Beberapa strategi individu tersebut adalah; *pertama*, penggunaan contoh, ketika melakukan bukti, penggunaan contoh merupakan suatu hal yang lazim dilakukan oleh individu, hal ini penting untuk mendapatkan ide dan mendalami pemahaman bukti, dan hal ini membentuk bagian dari suatu bukti. *Kedua*, menggunakan kesamaan-kesamaan, ketika melakukan bukti harus melakukan manipulasi yang digunakan ketika melakukan bukti. *Ketiga*, visualisasi, ketika melakukan bukti penting bagi individu untuk membuat visualisasi yang akan menuju ke bukti yang diinginkan. *Keempat* adalah *self regulation* (kemandirian). Salah satu isu yang penting dalam membuktikan adalah kemandirian belajar, kebanyakan mahasiswa yang melakukan bukti tidak mampu tetap

pada jalur menuju pembuktian. Beberapa mahasiswa ketika melakukan pembuktian tidak mampu memanggil kembali apa yang telah dilakukannya sebelumnya, dan tersesat saat membuktikan dan gagal menemukan bukti. Beberapa mahasiswa pun tidak dapat melihat ide kunci dan gambaran umum yang diperlukan untuk melengkapi bukti. Kelima, mengenali ide kunci. Aspek ini penting dalam membuktikan. Karena ide kunci pembuktian untuk masing-masing bukti berbeda dengan pembuktian untuk soal yang berbeda. Artinya ide ini merupakan hal yang krusial untuk dapat sukses dan merupakan komponen utama dalam melakukan pembuktian.

Moore (1994) lebih menekankan pada aspek kognitif yang dikaitkan dengan adanya beban kognitif (*cognitive load*) ketika mahasiswa dihadapkan pada proses membuktikan. Skema yang terbentuk pada mahasiswa belum padu dan terpisah-pisah, hal tersebut berbeda dengan skema pembuktian yang ada pada matematikawan yang telah padu dan berkaitan kuat. Sehingga Moore menyarankan untuk dilakukannya sebuah kuliah transisi bagi mahasiswa yang terfokus pada pembahasan bahasa matematika dan pembuktian yang akan menurunkan beban kognitif mahasiswa ketika melakukan pembuktian.

Sebagai penutup dari tulisan ini, masalah pembuktian matematis ini belum terjawab secara keseluruhan. Banyak aspek dan sudut pandang lain yang dapat digali dan dijadikan sebagai bahan penelitian yang berkaitan dengan bukti matematis formal. Permasalahan mengajarkan bukti formal yang lebih menekankan pada teori mengajar perlu kiranya dikembangkan lebih baik sehingga akan mengatasi permasalahan ini secara lebih baik dan komprehensif.

DAFTAR PUSTAKA

- Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us anything? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(4), 479-488
- Balacheff, N. (1988). Aspect of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children* (pp. 216-236). Great Britain: Hodder and Stoughton Educational.
- Epp, S. (2003). The role of logic in teaching proof. *The American Mathematics Monthly*, 110(10), 886-899.
- Gowers, W.T. *The Language and Grammar in Mathematics*. Diunduh dari <https://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/grammar.pdf> tanggal 8 Mei 2013.
- Hanna, G. (1991). Mathematical Proof. In David Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (p.54-61). The Netherland: Kluwer Academic Publisher.
- Jamison, R.E. (2000). *Learning and Language in Mathematics in Language and Learning Across the Disciplines*. Diunduh dari wac.colostate.edu. tanggal 10 Mei 2013.
- Kassios, Y. 2009. *Formal Proof*. Diunduh dari [http://www.cs.toronto.edu/~hehner/aPToP/formal proof-1.pdf](http://www.cs.toronto.edu/~hehner/aPToP/formal%20proof-1.pdf) tanggal 26 Maret 2012.
- Kleiner, I. (1991). Rigor and proof in mathematics: A historical perspective. *Mathematics Magazine*.
- Knuth, E. (2002). Secondary school mathematics teachers' conception of proof. Dalam *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 379-405.
- Martin, W. G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(1), 41 – 51.
- Moore, R.C., 1994. Making Transition to Formal Proof. *Journal of Educational Studies in Mathematics* 27: 249-266. Kluwer Academic Publisher: Netherlands.
- NCTM (2000). *Principles and Standar for School Mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

- Remillard, K.S. (2010). *Exploring the learning of mathematicak proof by undergraduate mathematics majors through discourse analysis*. Proceedings of the 13th Annual Conference in Research in Undergraduate Mathematics Education.
- Ruseffendi, E.T. (2006). *Pengantar Kepada Membantu Guru Mengembangkan Kompetensinya dalam Pengajar Matematika untuk Meningkatkan CBSA*. Tarsito: Bandung
- Sowder, L., & Harel, G. (2003). Case studies of Mathematics majors' proof understanding, production, and appreciation. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology*, 3, 251-267.
- Sriraman, B. 2004. The Characteristics of Mathematical Creativity. *The Mathematics Educator*, Vol 14, No.1 (19-34).
- Van Dormolen, J. (1977). Learning to understand what giving a proof really means. *Educational Studies in Mathematics*, 8, 27-34.
- Vanspronsen, H.D. 2008. *Proof Processes Of Novice Mathematics Proof Writers*. Dissertation University of Montana, Missoula.
- Yerizon (2011). Peningkatan Kemampuan Pembuktian Dan Kemandirian Belajar Matematik Mahasiswa Melalui Pendekatan M-Apos. Disertasi UPI Bandung.