

ABSTRAKSI REFLEKTIF DALAM BERFIKIR MATEMATIKA TINGKAT TINGGI

Elah Nurlaelah

Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA
Universitas Pendidikan Indonesia

ABSTRAK

Abstraksi Reflektif (*Reflective Abstraction*) adalah suatu konsep yang dikenalkan oleh Piaget untuk menjelaskan konstruksi *struktur logika matematika* seseorang dalam pengembangan kognitif pada saat mempelajari suatu konsep. Tujuan penulisan makalah ini untuk menjelaskan konsep *Abstraksi Reflektif* yang merupakan suatu alat yang berguna untuk mempelajari *berfikir matematika tingkat tinggi*, dan akan memunculkan suatu teori dasar yang mendukung dan berkontribusi pada pemahaman kita tentang pemikiran dan bagaimana kita dapat menolong siswa untuk meningkatkan kemampuan mereka dalam hal ini.

Kata kunci: Abstraksi reflektif, struktur logika matematika, berfikir matematika

PENDAHULUAN

Tujuan penulisan makalah ini untuk menjelaskan konsep *Abstraksi Reflektif* yang merupakan suatu alat yang berguna untuk mempelajari *berfikir matematika tingkat tinggi*, dan akan memunculkan suatu teori dasar yang mendukung dan berkontribusi pada pemahaman kita tentang pemikiran dan bagaimana kita dapat menolong siswa untuk meningkatkan kemampuan mereka dalam hal ini.

Dubinsky, E dalam Tall, D (1991, p. 95-123), menjelaskan apa yang dimaksud Abstraksi Reflektif dalam konteks berfikir matematika tingkat tinggi, bagaimana hubungan antara Abstraksi Reflektif dalam berfikir matematika tingkat tinggi dengan Abstraksi Reflektif yang dikemukakan oleh Piaget, selanjutnya ditunjukkan bagaimana Abstraksi Reflektif dapat digunakan untuk menjelaskan epistemologi dari beberapa konsep matematika.

Abstraksi Reflektif (*Reflective Abstraction*) adalah suatu konsep yang dikenalkan oleh Piaget untuk menjelaskan konstruksi *struktur logika matematika* seseorang dalam pengembangan kognitif pada saat mempelajari suatu konsep. Terdapat dua hasil penelitian yang penting yang diperoleh Piaget yaitu *kesatu* Abstraksi Reflektif tidak memiliki waktu mulai yang mutlak tetapi terjadi pada saat usia awal dalam koordinasi struktur sensori-motor, *kedua* Abstraksi Reflektif akan terus berlangsung sampai mencapai konsep matematika yang lebih tinggi yang

diperlukan oleh seseorang untuk mengisi seluruh sejarah perkembangan matematika dari semenjak awal sampai saat ini, oleh karena itu proses tersebut dapat dipandang sebagai suatu contoh dari proses Abstraksi Reflektif (dalam Tall, D: 95).

Penelitian-penelitian Piaget berkonsentrasi untuk meneliti perkembangan pengetahuan matematika anak-anak pada usia awal, jarang penelitian tersebut dilakukan untuk anak-anak usia remaja. Berkaitan dengan hal itu maka Dubinsky mengembangkan pendekatan yang sama seperti yang dilakukan oleh Piaget untuk menjelaskan konstruksi konsep untuk materi-materi seperti aritmatika, perbandingan dan pengukuran sederhana pada anak-anak, untuk diperluas pada topik-topik matematika di perguruan tinggi, dan seperti halnya hal itu memungkinkan, bukan hanya untuk didiskusikan, tapi merupakan suatu hal yang harus dimunculkan. Konsep-konsep seperti induksi matematika, fungsi sebagai suatu proses dan sebagai suatu objek, kebebasan linear, ruang-ruang topologi, sifat dualitas ruang vektor, sifat dualitas pada ruang vektor kategori, bahkan teori kategori *dapat dianalisa* dengan menggunakan konsep Piaget .

Istilah “*dapat dianalisa*“ dalam kalimat diatas mengandung tiga makna yang berkaitan dengan Abstraksi Reflektif yaitu; 1) untuk menjelaskan konsep-konsep dan penerapannya yang selanjutnya disebut *teori umum*, untuk mengetahui mengenai pemahaman terhadap suatu konsep, kedua hal tersebut berkaitan dengan bagaimana siswa benar-benar mengkonstruksi suatu konsep, selanjutnya ternyata siswa memerlukan waktu untuk mengkonstruksi suatu konsep supaya menjadi bermakna dalam mengatasi persoalan-persoalan yang mereka hadapi. Analisis ketiga hal di atas memuat suatu sintesis untuk menjawab suatu pertanyaan bagaimana suatu topik tertentu dalam matematika dapat dipelajari oleh siswa. Titik awal tentang *teori umum* adalah pengertian Piaget tentang Abstraksi Reflektif. Oleh karena itu fokus pembahasan kita adalah Abstraksi Reflektif.

PENGERTIAN PIAGET TENTANG ABSTRAKSI REFLEKTIF

1. Pentingnya Abstraksi Reflektif

Piaget membedakan tiga macam *abstraksi* yaitu; *abstraksi empiris* (Empirical Abstraction), *abstraksi empiris-palsu* (Pseudo-Empirical Abstraction), dan *abstraksi reflektif* (Abstraction Reflective).

Dalam *Abstraksi Empiris* individu memperoleh pengetahuan dari sifat-sifat objek (Tall, D: 97). Ini dapat diartikan bahwa pengetahuan dapat diperoleh dari pengalaman-pengalaman yang muncul. Pengetahuan yang diperoleh pada sifat ini bersifat internal dan hasil konstruksi dibangun secara internal oleh subjek. Berdasarkan Piaget, abstraksi jenis ini menghasilkan penurunan sifat-sifat umum

suatu objek dan perluasan suatu generalisasi, ini berarti objek-objek itu dijelaskan dari hal khusus ke yang umum.

Abstraksi empiris-palsu adalah pertengahan antara *abstraksi empiris* dan *abstraksi reflektif* dan memisahkan kedua sifat ini sehingga aksi dari subjek dikenalkan menjadi objek. Sebagai contoh penelahan tentang korespondensi 1-1 antara dua himpunan objek dimana objek-objeknya sudah ditempatkan secara berjajar. Pengetahuan dalam situasi seperti ini dapat dipandang sebagai abstraksi empiris sebab harus dikerjakan berkaitan dengan objek, tapi konfigurasi dan hubungannya dalam suatu ruang akan membawa hal tersebut dari aksi ke subjek. Jelas, pemahaman relasi 1-1 antara dua himpunan menghasilkan konstruksi internal yang dibuat oleh subjek.

Abstraksi reflektif digambarkan oleh Piaget sebagai koordinasi umum (*general coordinations*) dari aksi sedemikian sehingga sumbernya adalah subjek yang dilengkapi dengan sifat internal lengkap. Sebagai contoh anak-anak yang membentuk aksi-aksi individual untuk membentuk pasangan dua, tiga, dst. Selanjutnya *menginteriorize* dan mengkoordinasi aksi untuk membentuk urutan secara total. Abstraksi jenis ini menghasilkan suatu urutan yang sangat berbeda tentang sesuatu secara umum dimana hal ini konstruktif dan menghasilkan “suatu sintesis baru ditengah aturan khusus yang memunculkan arti baru”. Contoh lainnya adalah konsep ring euclids dimana konsep ini benar-benar abstrak dan sangat umum. Hasil ini dipertimbangkan termasuk kedalam jenis ini karena menurunkan sifat-sifat bilangan bulat.

Abstraksi empiris dan abstraksi empiris-palsu menggambarkan bahwa pengetahuan dari objek-objek menampilkan (membayangkan) aksi padanya. Abstraksi Reflektif meng-*interiorize* dan mengkoordinasi aksi-aksi ini untuk membentuk aksi yang baru, dan menghasilkan objek-objek baru (yang tidak lagi menjadi berbentuk fisik tetapi lebih mengarah kepada konsep matematikanya seperti fungsi dan grup). Abstraksi Empiris selanjutnya mengekstraksi data dari objek-objek baru tersebut melalui aksi mental, demikian seterusnya. Timbal balik ini akan direfleksikan dalam perluasan ide tersebut oleh Dubinsky yang akan dijelaskan pada bagian selanjutnya.

Kembali kepada ide dari Piaget, perlu ditekankan bahwa tidak disarankan bahwa semua materi matematika tingkat tinggi dapat dikerjakan dalam satu cara aplikasi dengan menggunakan abstraksi reflektif. Dalam hal ini abstraksi reflektif muncul sebagai suatu penjelasan dari suatu mekanisme untuk mengembangkan pemikiran intelktual yang menjelaskan munculnya berfikir tingkat tinggi dalam perkembangan kognitif sebagaimana teori Piaget.

2. Sifat dari Abstraksi Reflektif

Berdasarkan Piaget, bagian pertama dari abstraksi reflektif terdiri dari penggambaran sifat-sifat dari aksi mental dan fisik pada tingkat pemikiran tertentu. Hal ini termasuk, kaitannya dengan hal-hal lain, pengetahuan dan kesadaran tentang aksi, termasuk juga tindakan untuk memisahkan suatu bentuk dari keseluruhan. Dengan demikian “abstraksi” diproyeksikan kedalam bidang yang lebih tinggi dimana aksi pemikiran yang lain ada untuk membentuk kekuatan dalam membentuk model fikiran.

Piaget memandang bahwa aspek konstruksi dalam abstraksi reflektif lebih penting daripada aspek abstraksi. Untuk konsep ini Dubinsky melakukan suatu penelitian, diperoleh hasil bahwa konstruksi dari abstraksi reflektif adalah bagian penting untuk pengembangan konsep-konsep matematika, dan dengan mengkombinasikan struktur formal akan merupakan perluasan alami dari pengembangan pemikiran, tetapi dia juga menggunakan analisisnya dari proses ini yang berkaitan dengan pertanyaan secara philosophy tentang pemikiran matematika secara alami.

3. Suatu Teori tentang Pengembangan Konsep–Konsep dalam Berfikir Matematika Tingkat Tinggi.

Piaget (dalam Tall, D p. 102) mempercayai bahwa abstraksi reflektif adalah hal yang penting untuk berfikir logis matematika yang lebih tinggi seperti yang terjadi dalam berfikir logis pada anak-anak. Berkaitan dengan itu untuk mengembangkan pengertian abstraksi reflektif pada berfikir matematika tingkat tinggi, perlu dipisahkan apa-apa yang menjadi ciri-ciri yang penting pada abstraksi reflektif, merefleksikan aturan-aturannya pada matematika yang lebih tinggi, mengenali dan merekonstruksinya kembali supaya dapat dibentuk suatu teori yang sejenis mengenai pengetahuan matematika dan instruksi-instruksinya.

Ed Dubinsky (Tall, D.p. 102-103) mengkonstruksi abstraksi reflektif berupa objek-objek mental dan aksi-aksi mental pada objek-objek ini. Selanjutnya Dubinsky menampilkan dan menghubungkan teorinya untuk konsep-konsep tertentu dalam matematika, dia menggunakan pengertian *schema*. Suatu *schema* adalah koleksi sejenis dari objek dan proses. Seorang subjek cenderung menyusun *schema* berkaitan dengan pemahaman, mengorganisasi, membuat makna tentang suatu persoalan yang berkaitan dengan suatu konsep matematika. Jadi setiap individu akan memiliki *schema-schema* tertentu, misalnya *schema* tentang bilangan, *schema* tentang aritmatika, *schema* tentang himpunan, *schema* tentang pembuktian, dan lain sebagainya. Jelas *schema-schema* ini akan menghubungkan beberapa konsep yang luas, dengan pengorganisasian yang sangat kompleks. Selanjutnya akan dikenal istilah-istilah *process* atau *mental process* yang

merupakan aksi mental yang penekanannya secara internal (kepada subjek). Dan suatu bentuk *object* yang akan berbentuk objek mental atau objek fisik.

Tujuan utamanya adalah memberikan penjelasan secara eksplisit dan hubungan yang mungkin antara *schema*. Jika hal ini dilakukan untuk suatu konsep tertentu, kita akan menyebutnya sebagai *genetic decomposition* untuk suatu konsep. Perlu dijelaskan bahwa *genetic decomposition* tidak sama untuk setiap anak.

Piaget dalam David. Tall (1991) mengemukakan bahwa tidak mudah untuk memisahkan penjelasan tentang pengetahuan matematika dari konstruksinya “ The problem of knowledge, the so-called epistemological problem, cannot be considered separately from the problem of the development of intelligence“. Jadi tidak mungkin untuk mengobservasi secara langsung suatu *schema* seseorang ataupun *process* dan *object*-nya. Kita hanya dapat meperkirakannya dari observasi pada individu yang bisa atau tidak dalam menyelesaikan suatu persoalan yang disodorkan padanya. Suatu situasi dimana individu menyelesaikan suatu persoalan atau mencoba untuk memahami suatu fenomena. Sebenarnya dengan situasi seperti ini individu mengkonstruksi pengetahuan matematika yang baru.

Pada kondisi seperti inilah abstraksi reflektif muncul. Walaupun kita mengatakan bahwa pengetahuan matematika terdiri dari kumpulan *schema*, tapi kita hanya mengetahui sedikit sekali tentang bagaimana pengetahuan itu ada dalam pikiran seseorang. Karena hal ini tidak terlihat dalam memori atau dalam konfigurasi psikologi. Seorang subjek akan mempunyai kecenderungan untuk merespon persoalan-persoalan tertentu dengan cara yang relatif konsisten sebagaimana dapat kita jelaskan dalam bentuk suatu *schema*. Ketika seseorang berhasil, kita katakan bahwa persoalan telah diasimilasi oleh *schema*, dan ketika individu tidak berhasil dalam mengatasi persoalan, padahal dia berada dalam kondisi baik, keberadaan schemanya bisa diakomodasi untuk menangani fenomena yang baru. Hal ini merupakan aspek abstraksi reflektif sebagaimana diajukan sebagai pembentuk bagian utama dari perhatian kita.

Selanjutnya Dubinsky menjelaskan bahwa satu hal yang dapat dipikirkan dari reabstraksi reflektif adalah mencoba menguraikan apa yang dibutuhkan ketika sesuatu terjadi sementara tujuan yang lain tidak. Dan mengemukakan ide untuk menggunakan pengalaman komputer untuk menolong siswa dalam membentuk abstraksi reflektif masih merupakan suatu perdebatan.

4. Konstruksi dalam Konsep-Konsep Matematika Tingkat Tinggi

Berkaitan dengan konstruksi mental, Piaget menemukan perkembangan logika berfikir anak-anak, yaitu interiorisasi (*interiorization*), koordinasi (*coordination*), enkapsulasi (*encapsulation*), generalisasi (*generalization*), dan pembalikan

(reversal). Selanjutnya tiap-tiap konstruksi tersebut akan muncul berkaitan dengan konteks berfikir matematika tingkat tinggi untuk menjelaskan bagaimana *objects*, *processes*, dan *schemas* dapat dikonstruksi dari salah satu konstruksi tersebut.

Dubinsky memberikan contoh dalam menggunakan salah satu dari lima konstruksi tersebut dan yang lainnya menggunakan kombinasi dua atau lebih dari mereka. Beberapa contoh itu diambil berdasarkan pengalaman dari siswa dan yang lainnya hanya suatu perkiraan yang dimunculkan sebagai observasi awal. Perlu diperhatikan bahwa konstruksi mental tersebut tidak secara otomatis, alami, dan mudah dilakukan oleh siswa yang terpenting dari keseluruhan persoalan pendidikan adalah harus dipertimbangkan mengapa siswa bisa atau tidak membentuk konstruksi khusus ini dan apa yang dapat dilakukan untuk menolong mereka. Hal ini merupakan isu terpenting untuk penelitian dalam pendidikan matematika.

Dubinsky *et al* (1989), menjelaskan bahwa bagian terpenting untuk memahami suatu konsep fungsi adalah mereka telah meneliti konstruksi suatu process. Untuk contoh-contoh individual ini berarti mereka merespon situasi dimana konsep suatu fungsi muncul (melalui rumus, sebagai suatu algoritma, atau disajikan dalam bentuk data). Disajikan data seperti itu, mungkin individu merespon dengan mengkonstruksi process yang berkaitan dengan proses dari suatu fungsi. Contoh ini adalah interiorisasi.

Contoh lainnya misalnya pembalikan (reversal) dari suatu process, beberapa contoh yang sangat familiar dengan kita yang berkaitan dengan pembalikan suatu process adalah pengurangan, pembagian, menyelesaikan suatu persamaan, menginverskan suatu fungsi, membuktikan ketaksamaan dan lain-lain.

KESIMPULAN

Dubinsky mengembangkan konsep struktur logika matematika yang ditemukan Piaget untuk anak-anak pada siswa-siswa di perguruan tinggi. Dengan menggunakan struktur yang sama dengan Piaget, Dubinsky mengembangkan konstruksi mental *Action*, *Proses*, *Object* dan *Schema* yang berkaitan dengan konstruksi *interiorization*, *coordination*, *encapsulation*, *generalization*, dan *reversal* dari Piaget. Kaitan kedua konstruksi ini dijelaskan oleh Dubinsky dan diterapkan dengan memberikan beberapa contoh penerapannya.

DAFTAR PUSTAKA

- Tall, D. (199). *Advanced Mathematical Thinking* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Dubinsky, E. (1989). *The Case Against Visualization in School and University Mathematic*, Position paper presented to the Advanced mathematical Thinking Group at PME 13. Paris.
- Dubinsky, E. (1991). *Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking*. in Tall, David (199), *Advanced Mathematical Thinking*.(pp. 95-123) Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.