APLIKASI MATRIKS HANKEL PADA PERHITUNGAN RESULTAN DUA POLINOMIAL

Oleh:

R. Rosnawati

Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta

ABSTRACT

Let *F* be a *field*, *f* and *g* in *F*[*x*], with degre *f* is *n* and degre *g* is *m*. Computing resultant two polynomials with Hankel matrics give a size of matrics less than Sylvester method, that is maximum *n* or *m*.

Keyword : *resultan, Hankel matrics, Sylvester method*

Pendahuluan

Permasalahan dalam kehidupan sehari-hari seperti kisi kerja dapat disusun dalam bentuk model matematika yang pada akhirnya akan menghasilkan persamaan matriks

$$AX - XB = -C \tag{1}$$

dengan matriks *A* berukuran $m \times m$ dan matriks *B* berukuran $n \times n$ atas *field F* (Ma, E.C., 1966 : 490). Pentingnya penyelesaiaan persamaan (1) menimbulkan motivasi bagi para peneliti untuk mencari metode penyelesaiannya.

Apabila kedua ruas pada persamaan (1) dikalikan dengan $adj(\lambda I - A)$ dan dengan $adj(\lambda I - B)$, akan diperoleh :

$$X\left(\sum_{i=0}^{m} a_i \lambda^i\right)\left(\sum_{j=o}^{n-1} B_j \lambda^j\right) - \left(\sum_{i=0}^{n} b_i \lambda^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m-1} A_j \lambda^j\right)X = \left(\sum_{i=0}^{m-1} A_i \lambda^i\right)C\left(\sum_{j=0}^{n-1} B_j \lambda^j\right) \tag{2}$$

dengan a_i adalah koefisien-koefisien dari polinomial $|\lambda I - A|$, b_j adalah koefisien-koefisien dari polinomial $|\lambda I - B|$, A_i adalah koefisien-koefisien dari matriks polinomial $adj(\lambda I - A)$, B_j adalah koefisien-koefisien dari matriks polinomial $adj(\lambda I - B)$. Selanjutnya dengan menyamakan koefisien-koefisien λ^i ruas kanan dan ruas kiri dari persamaan (2) diperoleh:

$$X\left(\sum_{i=0}^{r} a_i B_{r-i}\right) - \left(\sum_{j=0}^{r} b_j A_{r-j}\right) X = C_k = \left(\sum_{k=0}^{r} A_{r-ki} C B_k\right) \tag{3}$$

untuk $r = 0,1,\ldots, m+n-1$. Persamaan (3) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks partisi sebagai berikut :

$$\left[M\left(|\lambda I - A|, |\lambda I - B|\right) \otimes I_m\right] \begin{bmatrix} XB_0 \\ XB_1 \\ \vdots \\ XB_{n-1} \\ -A_0 X \\ \vdots \\ -A_{m-1} X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \\ \vdots \\ \\ C_{m+n-2} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

dengan *M* matriks Sylvester (Hartwig, 1972:104-110).

Matriks Sylvester, *M*, adalah matriks bujursangkar yang mempunyai ordo jumlah dari derajat polinomial $|\lambda I - A|$ dan polinomial $|\lambda I - B|$ dengan elemen-elemennya berasal dari koefisien-koefisien polinomial $|\lambda I - A|$ dan polinomial $|\lambda I - B|$. Agar persamaan (1) dapat diselesaikan dengan bantuan matriks Sylvester, determinan matriks Sylvester haruslah tidak nol. Determinan dari matriks Sylvester ini dikenal dengan resultan dari polinomial $|\lambda I - A|$ dan polinomial $|\lambda I - B|$.

Berikut ini akan dibahas mengenai pengertian resultan dua polinomial serta ide dasar pengertian resultan dua polinomial. Definisi resultan pertamakali diberikan oleh Sylvester yang dikenal dengan metode Sylvester sebagai berikut :

Definisi 1 *(Van der Waerden, 1953 : 84)*

Misalkan F adalah suatu *field*, *f* dan *g* adalah dua polinomial dalam $F[x]$ yang berturut-turut berderajat *n* dan *m*; dengan $n + m \geq 1$.

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_0, \quad a_n \neq 0 \\ g(x) &= b_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + a_{m-2} x^{m-2} + \cdots + b_0, b_m \neq 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Resultan *f* dan *g* didefinisikan sebagai berikut :

$$\operatorname{Res}(f,g)=\det\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_n & a_n & & & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & a_1 & a_2 & a_3 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-1} & b_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \vdots & \vdots & b_m & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & b_2 & b_3 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-1} & b_m \end{bmatrix}$$

matriks yang berukuran (*n*+*m*) x (*n*+*m*) di atas disebut dengan matriks Sylvester.

Ide dasar pengertian resultan dua polinomial adalah sebagai berikut :

Misalkan F adalah *field*, f dan g seperti dalam (5), akan diselidiki syarat perlu dan cukup agar dua polinomial tersebut mempunyai pembagi yang tidak konstan.

Misalkan f dan g seperti dalam (5), terdapat pembagi dari f dan g jika dan hanya jika terdapat $h(x)$ dan $k(x)$ di dalam $F[x]$ sehingga :

$$h(x)f(x)=k(x)g(x) \tag{6}$$

dengan derajat $k(x)\le n-1$; derajat $h(x)\le m-1$

Misalkan:

$$h(x)=c_{m-1}x^{m-1}+c_{m-2}x^{m-2}+\cdots+c_1\chi+c_0$$

$$k(x)=d_{n-1}x^{n-1}+d_{n-2}x^{n-2}+\cdots+d_1\chi+d_0$$

Persamaan (6) dapat dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan linear berikut :

$$\left.\begin{array}{ccc} c_{m-1}a_n & = & d_{n-1}b_m \\ c_{m-1}a_{n-1}+c_{m-2}a_n & = & d_{n-1}b_{m-1}+d_{n-2}b_m \\ c_{m-1}a_{n-2}+c_{m-2}a_{n-1}+c_{m-3}a_n & = & d_{n-1}b_{m-2}+d_{n-2}b_{m-1}+d_{n-3}b_m \\ \vdots & & \vdots \\ c_0a_0 & = & b_0d_0 \end{array}\right\} \tag{7}$$

yang terdiri atas $n+m$ persamaan linear dengan variabel-variabel c_i dan d_j, $i = 0,1,2,\ldots,m-1,\quad j = 0,1,2,\ldots,n-1$. Polinomial f dan g memiliki pembagi jika dan hanya jika sistem (7) memiliki penyelesaian yang tidak nol.

Apabila sistem (7) disusun dalam bentuk matriks maka diperoleh :

$$\begin{bmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & -b_m & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 & -b_{m-1} & -b_m & \cdots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & 0 & -b_{m-2} & -b_{m-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & -b_0 & -b_1 & \cdots & -b_{m-1} \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{n-2} & 0 & -b_0 & \cdots & -b_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 & 0 & 0 & \cdots & -b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{m-1} \\ c_{m-2} \\ \vdots \\ c_0 \\ d_{n-1} \\ d_{n-2} \\ \vdots \\ d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

Menunjukkan bahwa sistem persamaan (8) mempunyai penyelesaian non-trivial ekuivalen dengan menyatakan determinan matriks bujur sangkar dalam persamaan (8) adalah nol.

Selanjutnya determinan dari matriks bujursangkar pada persamaan (8) disebut dengan Resultan dari f dan g, ditulis dengan $\underline{\operatorname{Re}s(f,g)}$. Menurut Van der Waerden (1953:83-85), Sylvester mendefinisikan $\operatorname{Re}s(f,g)$ dengan mengubah matriks bujursangkar pada persamaan (8) melalui operasi baris elementer dan operasi transpose. Dari definisi $\operatorname{Re}s(f,g)$, yang diberikan Sylvester, ukuran matriks yang berkaitan dengan $\operatorname{Re}s(f,g)$ adalah $(n+m)\times(n+m)$, sehingga dalam perhitungan $\operatorname{Re}s(f,g)$ sangatlah tidak menyenangkan. Begitu pula apabila dihitung dengan bantuan komputer, tidak efisien.

Dengan bantuan matriks Hankel ukuran matriks yang digunakan untuk menghitung resultan dua polinomial menjadi lebih kecil, yaitu mak(n,m) x mak(n,m).

Dari Definisi 1 dan mengingat koefisien dari polinomial dapat dihubungkan dengan elemen-elemen dari matriks $M_{nxn}(F)$, dapat ditunjukkan adanya relasi $P_n(F) \to M_{nxn}(F)$. Beberapa metode untuk menghitung resultan tersebut menimbulkan relasi yang memenuhi definisi *f-map* (Orzech, 1983), yang akan dijelaskan berikut ini.

f-MAP

Misalkan F adalah suatu *field*, P_n himpunan polinomial di dalam $F[x]$ dengan derajat kurang atau sama dengan *n-1* dan $M_n(F)$ adalah himpunan matriks berukuran *nxn* atas F.

Definisi 2 *(Griffiths,1981)*

Diberikan polinomial f berderajat n di dalam $F[x]$. Fungsi $\psi : P_n \to M_n$ disebut *f-map* apabila memenuhi :

1. $\psi(1)$ matriks invertible
2. $\psi(g+c) = \psi(g) + c\psi(1)$, $\forall g \in P_n$, $\forall c \in F$
3. jika f dan g memiliki faktor non-trivial, maka $\psi(g)$ matriks tidak invertible

Berikut ini adalah beberapa sifat dari *f-map* yang akan digunakan pada pembuktian selanjutnya.

Misalkan $f(x)$ dan $g(x)$ seperti dalam (5) dengan $m \le n-1$ dan $f(x)$ memiliki akar-akar yang berbeda $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, serta $g(x)$ memiliki akar-akar yang berbeda $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, yakni :

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n) \\ g(x) &= b_m(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_m) \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Didefinisikan : $F = f(\beta_1)f(\beta_2)\cdots f(\beta_m), \quad G = g(\alpha_1)g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n)$

Hubungan antara F dan G tertuang dalam lemma berikut:

Lemma 3

$$G = \prod_{ij} b_m^n(\alpha_i - \beta_j)$$

$$(-1)^{nm} b_m^n F = a_n^m G$$

Bukti :

Dari persamaan (9) diperoleh :

$$g(\alpha_1) = b_m(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_1-\beta_2)\cdots(\alpha_1-\beta_m)$$

$$g(\alpha_2) = b_m(\alpha_2-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)\cdots(\alpha_2-\beta_m)$$

$$\vdots$$

$g(\alpha_n) = b_m(\alpha_n - \beta_1)(\alpha_n - \beta_2)\cdots(\alpha_n - \beta_m)$, sehingga diperoleh

$$G = \prod_{ij} b_m^n(\alpha_i - \beta_j)$$

Secara analog untuk *F*, diperoleh :

$$(-1)^{nm} b_m^n F = a_n^m G$$

Proposisi 4

Jika *f* memiliki *n* akar yang berbeda, maka untuk setiap *f-map* $\psi : P_n \to M_n$,

berlaku: $\det(\psi(g)) = \det(\psi(1))G = \det(\psi(1))(-1)^{mn} \dfrac{b_m^n}{a_n^m} F$

Bukti:

Karena ψ merupakan *f-map*, berarti $\psi(1)^{-1}$ ada. Jika α_1 akar *f*, maka sebarang polinomial $g(x) - g(\alpha_i)$ memiliki akar α_i. Apabila $f(x)$ dan $g(x)$ seperti dalam (5), maka diperoleh :

$$g(x) - g(\alpha_i) = \left(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots b_1 x\right) - \left(b_m \alpha_i^m + b_{m-1}\alpha_i^{m-1} + \cdots b_1\alpha_i\right).$$

Karena $f(x)$ dan $g(x) - g(\alpha_i)$ memiliki akar non-trivial maka :

$$\det\left(\psi\left(g(x) - g(\alpha_i)\right)\right) = 0,$$

$$\det\left(\psi(g(x)) - g(\alpha_i)\psi(1)\right) = 0,$$

$$\det\left(\left(\psi(1)\psi(1)^{-1}\right)\psi(g(x)) - g(\alpha_i)\psi(1)\right) = 0,$$

$$\det\left(\psi(1)\left(\psi(1)^{-1}\psi(g(x)) - g(\alpha_i)I_n\right)\right) = 0,$$

$$\det\left(\psi(1)\right)\det\left(\psi(1)^{-1}\psi(g(x)) - g(\alpha_i)I_n\right) = 0,$$

Karena $\det(\psi(1)) \neq 0$, diperoleh :

$$\det\left(\psi(1)^{-1}\psi(g(x)) - g(\alpha_i)I_n\right) = 0, \text{ dan}$$

$$\det\left(W - g(\alpha_i)I_n\right) = 0, \text{ dengan } W = \psi(1)^{-1}\psi(g(x)).$$

Dari persamaan di atas $g(\alpha_i)$ merupakan nilai eigen *W*.

Karena diasumsikan terdapat n akar f yang berbeda berarti terdapat $g(\alpha_i)$, i= 1, 2, …, n, yang merupakan nilai eigen W, sehingga nilai determinan W adalah :

$$\det(W) = g(\alpha_1)g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n)\,.$$

Di sisi lain, $W = \psi(1)^{-1}\psi(g(x))$, sehingga nilai determinan W adalah :

$$\begin{aligned}\det(W) &= \det\left(\psi(1)^{-1}\psi(g)\right)\\ &= \det\left(\psi(1)^{-1}\right)\det\left(\psi(g)\right), \text{ sehingga}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det\left(\psi(g)\right) &= \frac{\det(W)}{\det\left(\psi(1)^{-1}\right)}\\ &= \det\left(\psi(1)\right)\det(W) = \det\left(\psi(1)\right)\left(g(\alpha_1)g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n)\right)\\ &= \det\left(\psi(1)\right)G\,.\end{aligned}$$

Dengan Lemma 3 diperoleh :

$$\det\left(\psi(g)\right) = \det\left(\psi(1)\right)(-1)^{mn}\frac{b_m^n}{a_n^m}F \quad \square$$

Kaitan antara akar-akar polinomial dengan resultan tertuang dalam teorema berikut, dimana pembuktian secara lengkap terdapat dalam Prasolov (1994:188-189).

Teorema 5

Diberikan polinomial f dan g seperti pada (9), yang memiliki akar-akar berturut-turut α_i dan β_j, maka Res(f,g) = $a_n^m \prod g(\alpha_i) = b_m^n\left(f\left(\beta_j\right)\right)$

Matriks Hankel

Pada bagian ini akan dibahas mengenai pengertian matriks Hankel dan teorema yang berkenaan dengan matriks Hankel, yang akan digunakan pada pembuktian selanjutnya, serta kaitan antara matriks Hankel dengan *f-map*

Definisi 6

Misalkan $s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots$, barisan bilangan. Matriks $\begin{bmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$ yang berkoresponden dengan Hankel form disebut matriks Hankel

Teorema 7

Untuk setiap s_q, $q=r$, $r+1$, $r+2$, ... terdapat α_1, α_2 , …, α_r, sehingga $s_q = \sum_{g=1}^{r} \alpha_g s_{q-g}$ jika dan hanya jika matriks tak berhingga $[H] = [s_{i+k}]_0^\infty$ memiliki rank berhingga r.

Berikut akan dibahas hubungan antara matriks Hankel dengan fungsi rasional.

Misalkan F adalah suatu *field*, f dan g adalah dua polinomial dalam $F[x]$ yang berturut-turut berderajat n dan m; dengan $m<n$, dan $n+m \geq 1$.

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_0 , \quad a_n \neq 0 \\ g(x) &= b_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + a_{m-2} x^{m-2} + \cdots + b_0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Diberikan $R(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$. Apabila $R(x)$ dinyatakan sebagai polinomial pangkat negatif dalam x maka diperoleh :

$$R(x) = \frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x^3} + \cdots.$$

Dengan mengalikan kedua sisi dengan $f(x)$ diperoleh hubungan sebagai berikut

$$\left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0\right) \left(\frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x^3} + \cdots\right) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_0$$

Dalam sistem persamaan dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\left.\begin{aligned}
&a_n s_0 = b_{n-1}\\
&a_n s_1 + a_{n-1} s_0 = b_{n-2}\\
&a_n s_2 + a_{n-1} s_1 + a_{n-2} s_0 = b_{n-3}\\
&\vdots\\
&a_n s_{n-1} + a_{n-1} s_{n-2} + \cdots + a_2 s_1 + a_1 s_9 = b_0
\end{aligned}\right\}$$

untuk setiap $q \geq n$

$$a_n s_q + a_{n-1} s_{q-1} + \cdots + a_1 s_{q-n+1} + a_0 s_{q-n} = 0$$

Lebih jauh untuk setiap $q \geq n$

$$s_q = \alpha_1 s_{q-1} \alpha_2 s_{q-2} + \cdots + \alpha_n s_{q-n} \text{ , dengan } \alpha_i = \frac{-a_i}{a_n}$$

atau

$$s_q = \sum_{g=1}^{r} \alpha_g s_{q-g}$$

Apabila barisan $s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots$ dibentuk matriks Hankel, maka berdasarkan Teorema 1 matriks Hankel tak berhingga $[H] = [s_{i+k}]_0^\infty$ memiliki rank berhingga $\leq n$ yaitu :

$$[H] = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{bmatrix}$$

Diketahui f dan g seperti dalam (9)

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x^3} + \cdots$$

Didefinisikan pemetaan $\vartheta_f(.) : P_n \rightarrow M_n$ dengan definisi :

$$\vartheta_f(g)=\begin{bmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{bmatrix}$$

Akan ditunjukkan ϑ_f memenuhi definisi *f-map* sebagai berikut

Bukti :

1. $\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a_0}=\dfrac{r_0}{x}+\dfrac{r_1}{x^2}+\dfrac{r_2}{x^3}+\cdots$

$$\vartheta_f(1)=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \vdots & 0 & \frac{1}{a_n} & \frac{-a_{n-1}}{a_n^2} \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{-a_{n-1}}{a_n^2} & \cdots & * \end{bmatrix}$$

$$\det(\vartheta_f(1))=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{1}{a_n}\right)^n \neq 0$$

2. $\dfrac{(g(x)+c)}{f(x)}=\dfrac{g(x)}{f(x)}+\dfrac{c}{f(x)}$

$$=\frac{g(x)}{f(x)}+c\left(\frac{1}{f(x)}\right)$$

$$=\left(\frac{s_0}{x}+\frac{s_1}{x^2}+\frac{s_2}{x^3}+\cdots\right)+c\left(\frac{r_0}{x}+\frac{r_1}{x^2}+\frac{r_2}{x^3}+\cdots\right)$$

Jadi $\vartheta_f(g+c)=\vartheta_f(g)+c\,\vartheta_f(1)$

3. $\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{s_0}{x}+\dfrac{s_1}{x^2}+\dfrac{s_2}{x^3}+\cdots$

$$\vartheta_f(g) = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Teorema 1 rank $\vartheta_f(g)$ adalah $\leq n$

Diketahui f dan g memiliki akar y_m, akan ditunjukkan rank $\vartheta_f(g)$ adalah $\leq n-1$

$$g(x) = b_m(x-y_1)(x-y_2)\cdots(x-y_{m-1})(x-y_m)$$

$$f(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})(x-y_m)$$

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{b_m(x-y_1)(x-y_2)\cdots(x-y_{m-1})(x-y_m)}{a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})(x-y_m)}$$

diperoleh :

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{b_m(x-y_1)(x-y_2)\cdots(x-y_{m-1})}{a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}$$

Berdasar Teorema 1 rank $\vartheta_f(g)$ adalah $\leq n-1$, yang berarti banyaknya baris (kolom) yang bebas linier tidak lebih dari n-1, sehingga nilai $\det(\vartheta_f(g))$ adalah 0. Dengan kata lain $\vartheta_f(g)$ adalah matriks tidak invertible. □

Resultan Dua Polinomial Dan Matriks Hankel

Matriks Hankel [H] adalah matriks representasi dari pemetaan $\vartheta_f(g)$ yang memenuhi definisi f-map. Dengan melihat definisi dan sifat dari f-map kita dapat memanfaatkan matriks Hankel ini untuk menghitung resultan dua polinomial. Hubungan antara resultan dua polinomial dengan matriks Hankel tertuang dalam proposisi berikut

Teorema 8 $\operatorname{Res}(f,g) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{n+m} \det(\vartheta_f(g))$

Bukti :

Karena $\vartheta_f(g)$ merupakan *f-map*, berarti proposisi 4 berlaku, serta dengan memanfaatkan Teorema 5 maka diperoleh :

$$\det(\vartheta_f(g)) = \det(\vartheta_f(1))(G)$$

$$\det(\vartheta_f(g)) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{1}{a_n}\right)^n G$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{1}{a_n}\right)^n \frac{\operatorname{Re}s(f,g)}{a_n^m}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{1}{a_n}\right)^{n+m} \operatorname{Re}s(f,g)$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{-(n+m)} \operatorname{Re}s(f,g)$$

$$\operatorname{Re}s(f,g) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{n+m} \det(\vartheta_f(g)) \qquad \square$$

Contoh 1 : (Brown, 1996)

Diketahui F=ℝ, $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$ dan $g(x) = x^2 - 3x + 2$. Akan dicari resultan polinomial *f*(*x*) dan *g*(*x*) sebagai berikut.

(a) Dengan menggunakan definisi resultan atau metode Sylvester :

$$\operatorname{Re}s(f,g) = \det\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Re}s(f,g) = 0$$

(b) Dengan menggunakan metode matriks Hankel :

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^3 - 5x^2 + x + 2} = \frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x^3} + \frac{s_3}{x^4} + \frac{s_4}{x^5}$$

$$
\begin{aligned}
2s_0 &= 1\\
2s_1 - 5s_0 &= -3\\
2s_2 - 5s_1 + s_0 &= 2\\
2s_3 - 5s_2 + s_1 + 2s_0 &= 0\\
2s_4 - 5s_3 + s_2 + 2s_1 &= 0
\end{aligned}
$$

Diperoleh :

$$s_0 = \frac{1}{2} \qquad s_1 = \frac{-1}{4} \qquad s_2 = \frac{1}{8} \qquad s_3 = \frac{-1}{16} \qquad s_4 = \frac{1}{32}$$

$$\vartheta_f(g) = [H] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{-1}{16} & \frac{1}{32} \end{bmatrix}$$

$$\det[H] = 0$$

$$\operatorname{Re} s(f,g) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 2^{n+m} \det[H] = 2^5 \det[H] = 2^5 \times 0 = 0$$

Contoh 2 :

Diketahui F=ℝ, $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3x - 4$ dan $g(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$. Akan dicari resultan polinomial *f*(*x*) dan *g*(*x*) sebagai berikut :

(a) Dengan menggunakan definisi resultan atau metode Sylvester :

$$\operatorname{Re} s(f,g) = \det \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} = -13$$

(b) Dengan menggunakan metode matriks Hankel

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{2x^3 - 5x^2 + 4x - 3}{5x^4 - 6x^3 - 7x^2 + 6x + -8} = \frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x^3} + \frac{s_3}{x^4} + \frac{s_4}{x^5} + \frac{s_5}{x^6} + \frac{s_6}{x^7}$$

Diperoleh :

$$
\begin{aligned}
&s_0 = 1\\
&s_1 - 3s_0 = -2\\
&s_2 - 3s_1 + 2s_0 = 2\\
&s_3 - 3s_2 + 2s_1 + 3s_0 = -1\\
&s_4 - 3s_3 + 2s_2 + 3s_1 - 4s_0 = 0\\
&s_5 - 3s_4 + 2s_3 + 3s_2 - 4s_1 = 0\\
&s_6 - 3s_5 + 2s_4 + 3s_3 - 4s_2 = 0
\end{aligned}
$$

s_0=1 s_1=1 s_2=3 s_3=3 s_4=4 s_5=1 s_6=-2

Diperoleh matriks :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det[H] = -13$$

$$\operatorname{Re} s(f,g) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 1^{n+m} \det[H] = \det[H] = -13$$

Kesimpulan

Ukuran matrik yang digunakan dalam perhitungan resultan dua polinomial dengan menggunakan matriks Hankel lebih kecil dibanding dengan metode Sylvester yaitu maksimum dari derajat polinomial f dan g, sehingga akan mempermudah dalam proses perhitungannya. Apabila [H] adalah matriks Hankel yang berkenaan dengan fungsi rasional $\frac{g}{f}$ maka $\operatorname{Re} s(f,g) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{n+m} \det[H]$.

Daftar Pustaka

Brown, W.C. (1993) *Matrices Over Commutative Rings*, Marcel Dekker Inc, New York

Griffiths, H.B. (1981) Cayley's Version of Resultan of Two Polynomials, *Amer. Math. Monthy*, Vol 88, pp 328-338.

Hartwig, R.E. (1972) The Resultans and The Solutions AX-XB = C, *SIAM. J. Appl. Math*, 22:538-544

Ma, E.C. (1966) A finite Series Solutions of Matrix Equation AX_XB = C. *SIAM. J. Appl. Math*, 28 : 490-495.

Orzech, G. (1994) Several Version of Resultant of Two Polynomial, *Linear and Multilinear Algebra*, Vol 16, pp 275-282.

Prasolov, V.V. (1994) *Problem and Theorems in Linear Algebra*. American Mathematical Society, Provindence, R.I.

Van der Waerden, B.L. (1953) *Modern Algebra*, Vol 1, Prederikck Ungar, New York.