DARI ANALISIS FOURIER KE ANALISIS WAVELET

(From Fourier Analysis to Wavelet Analysis)

Oleh:

Bambang Avip Priatna Martadiputra *

Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Pendidikan Indonesia

ABSTRACT

In this article we will compare the classical methods of Fourier analysis with the never methods of wavelet analysis. Fourier methods are not always a good tool to recapture the signal, particularly if it is highly non-smooth because too much Fourier information is needed to reconstruct the signal locally. In this case, wavelet analysis is often very effective because it provides a simple approach for dealing with local aspects of a signal.

Key words: *Fourier analysis, Wavelet analysis*

PENDAHULUAN

Dalam tulisan ini akan diperkenalkan suatu metode baru yang sangat penting dalam analisis matematika yaitu **analisis wavelet** dengan terlebih dahulu mengulas kembali suatu metode klasik yang sudah dikenal, yaitu **analisis Fourier**. Apabila berfikir mengenai analisis Fourier maka biasanya akan merujuk pada transformasi-transformasi Fourier (integral) dan deret-deret Fourier. Transformasi Fourier dan deret Fourier adalah suatu yang penting dalam analisis Fourier karena tidak hanya dari tingkat kepercayaannya untuk menginterpretasikan secara fisik seperti analisis frekwensi untuk sinyal-sinyal, tetapi juga dari suatu kenyataan bahwa teknik-teknik analitik Fourier sangat kuat.

Sebuah transformasi Fourier adalah suatu integral Fourier untuk suatu fungsi f yang didefinisikan pada suatu garis real R. Apabila f dipandang sebagai suatu sinyal maka domain dari transformasi Fourier pada R disebut domain waktu kontinu. Dalam kasus ini, transformasi Fourier $(\mathrm{F}f) = \hat{f}$ untuk f menggambarkan perlakuan-perlakuan spektral untuk suatu sinyal f. Karena suatu informasi spektral

---

* Reviewer: Kosim Rukmana
Jurusan Pendidikan Matematika
FPMIPA UPI.

diberikan dalam bentuk-bentuk frekwensi, maka domain dari transformasi Fourier disebut domain frekwensi.

Suatu deret Fourier adalah suatu transformasi dari barisan-barisan bi-infinite untuk fungsi-fungsi periodik. Jadi apabila barisan-barisan bi-infinite dipandang sebagai suatu sinyal digital, maka domainnya adalah himpunan bilangan bulat Z yang disebut domain waktu diskrit. Dalam kasus ini, deret Fourier juga menggambarkan perlakuan-perlakuan spektral dari suatu sinyal digital. Karena deret Fourier adalah periodik-periodik 2π, maka suatu domain frekwensi R dalam keadaan ini biasanya dinyatakan dengan suatu lingkaran satuan (dalam Chui (1992)).

Pada akhir-akhir ini dikalangan ahli-ahli sains dan statistik sedang ramai dibicarakan suatu teknik baru untuk inferensi statistik nonparametrik yang disebut teori wavelet. Ogden (1997) mendefinisikan bahwa sebuah *wavelet* adalah *sebuah fungsi gelombang yang disederhanakan dan dikonstruksi dengan hati-hati sehingga memiliki sifat-sifat matematika yang dapat dipercaya*. Ide pengkonstruksian wavelet adalah bagaimana memilih suatu fungsi tunggal ψ (yang disebut wavelet) kemudian dibentuk keluarga-keluarga fungsi $\{\psi_{j,k}\ ;\ j,k \in Z\}$ yang diperoleh dengan cara mendilasi dan mentranslasikan ψ sehingga akan diperoleh sebuah basis (yang disebut basis wavelet) di $L^2(R)$. Oleh karena itu setiap $f \in L^2(R)$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $\psi_{j,k.}$

Walker (1997) mengatakan bahwa metode Fourier tidak selalu merupakan alat yang baik untuk menangkap kembali suatu sinyal, khususnya untuk sinyal yang ketinggiannya tidak “smooth”. Hal ini disebabkan karena akan banyak sekali informasi yang diperlukan untuk mengkonstruksi kembali suatu sinyal secara lokal. Dalam kasus ini, analisis wavelet sering sangat efektif sebab analisis wavelet menjanjikan suatu pendekatan sederhana dengan aspek-aspek lokal dari suatu sinyal.

ANALISIS FOURIER

Deret Fourier

Misalkan $L^2(0,2\pi)$ menyatakan koleksi dari semua fungsi-fungsi terukur f yang didefinisikan pada $(0,2\pi)$ dengan $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$. Suatu fungsi f $L^2(0,2\pi)$ diasumsikan dapat diperluas pada garis real R, dapat dinyatakan sebagai *deret Fourier*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx} \tag{2.1}$$

dengan c_n adalah suatu konstanta yang disebut *koefisien Fourier dari* f yang didefinisikan sebagai

$$c_n = \frac{1}{2}\pi \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \tag{2.2}$$

Konvergensi untuk deret Fourier (2.1) adalah

$$\lim_{N,M \to \infty} \int_0^{2\pi} \left| f(x) - \sum_{n=-M}^{N} C_n e^{inx} \right| dx = 0 \tag{2.3}$$

Dari deret Fourier (2.1) dapat dipandang dua hal yang berbeda, yaitu: *Pertama*, terlihat bahwa suatu fungsi f *didekomposisikan kedalam suatu jumlah dari takhingga banyak komponen-komponen yang saling ortogonal*, yaitu gn(x) = $c_n e^{inx}$. Dengan kata lain:

$$\langle g_m, g_n \rangle = \frac{1}{2}\pi \int_0^{2\pi} g_m(x) \overline{g_n}(x) dx = 0 \text{ untuk semua } n \neq m, \tag{2.4}$$

Ini dipenuhi sebagai akibat dari kenyataan bahwa

$$w_n(x) = e^{inx},\ n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots \tag{2.5}$$

adalah basis ortonormal untuk L2(0,2π), artinya $\{w_n\}$ adalah sistem ortonormal lengkap *(CONS), yaitu* $\{w_n\}$ *ortonormal dan fungsi yang ortogonal pada setiap* w_n *hanyalah fungsi nol*. Sedangkan yang *kedua* memandang bahwa deret Fourier (2.1) dibangun oleh *dilasi dari suatu fungsi tunggal* (sinosoidal wave)

$$w(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{2.6}$$

yaitu: $w_n(x) = w(nx) = e^{ins}$, $n \in Z$ yang disebut *dilasi integral*.

Untuk n besar maka wn mempunyai frekwensi tinggi, sedangkan untuk n kecil maka wn mempunyai frekwensi rendah. Jadi setiap fungsi terintegralkan kuadrat periodik 2π dibangun oleh suatu superposisi dari dilasi-dilasi integral dari suatu fungsi dasar $w(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Jika didefinikan $a_k = c_k + c_k$ dan $b_k = c_k - c_k$ maka deret Fourier (2.1) dapat dinyatakan sebagai

$$f(x) = \frac{1}{2}a_o + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx, b_k \sin kx) \qquad (2.7)$$

Karena cos u = $(e^{iu} + e^{-iu})/2$ dan sin u = $(e^{iu} - e^{-iu})/2$, maka (2.7) dapat dinyatakan sebagai

$$f(x) = \frac{1}{2}a_o + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - ib_k)e^{ikx} + \left(a_k + ib_k e^{\mathrm{ikx}}\right) \qquad (2.8)$$

Transformasi Fourier

Analisis Fourier dapat juga digunakan untuk fungsi-fungsi takperiodik yang didefinisikan pada R (dalam Odgen, 1997). Dengan cara memperluas (2.2) untuk suatu himpunan kontinu dari frekwensi-frekwensi dan merubah limit-limit dari integrasi untuk semua R memberikan suatu transformasi Fourier standar untuk suatu fungsi f $\in L^2(R)$ yang dinyatakan dalam definisi berikut.

Definisi:

Transformasi Fourier untuk f∈L2(R) sebagai fungsi frekwensi dari ω∈R didefinisikan sebagai

$$\hat{f}(\omega) = (Ff)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx \qquad (2.9)$$

Selanjutnya fungsi asli f dapat dinyatakan dalam bentuk transformasi Fourier oleh suatu invers transformasi Fourier, yaitu

$$f(x) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{-i\omega x}\,d\omega \text{ untuk } x \in R \qquad (2.10)$$

Selanjutnya dengan menggunakan identitas Parseval dapat ditunjukkan hubungan antara fungsi-fungsi dan transformasi Fouriernya, yaitu:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2}\pi \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle \qquad (2.11)$$

Contoh:

Misalkan f = $I_{(-a,a)}$ diperoleh transformasi Fourier *F* yaitu:

$$\hat{f}(\omega) = (Ff)(\omega) \int_{-a}^{a} e^{-i\omega x}\, dx = \int_{-a}^{a} \mathbf{Cos}\ \omega x dx = \frac{\mathbf{2sin} a\omega}{\omega}$$

ANALISIS WAVELET

Jika diberikan ruang fungsi terukur $L^2(R) = \left\{ f : R \to C \,\middle|\, \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$ maka jelas ruang fungsi $L^2(0,2\pi)$ dan $L^2(F)$ muncul berbeda. Karena suatu nilai dari setiap fungsi dalam $L^2(R)$ harus menjadi nol pada $\pm\ \infty$. Sedangkan fungsi-fungsi (waves) sinusoidal w_n tidak terletak pada $L^2(R)$. Berdasarkan kenyataan ini, jika memandang fungsi (waves) yang membangun $L^2(R)$, maka fungsi tersebut haruslah menjadi nol pada $\pm\ \infty$ dan untuk mempermudah pemilihan semua fungsi yang dimaksud maka haruslah dipilih fungsi-fungsi (small waves) atau *wavelets* yang membangun L2(R).

Dari bahasan sebelumnya diketahui bahwa sebuah fungsi tunggal $w(x) = e^{ix}$ membangun ruang fungsi $L^2(0,2\pi)$, dalam ruang fungsi $L^2(R)$ juga ada sebuah fungsi tunggal seperti w, sebut ψ. Suatu cara sederhana agar ψ dapat mencover semua R adalah dengan memberikan suatu *integral shifts* pada ψ yaitu $\psi(x-k)$, $k \in Z$. Selanjutnya seperti dalam situasi sinosoidal, harus diberikan juga fungsi-fungsi (waves) dengan frekwensi-frekwensi yang berbeda. Untuk alasan yang berbeda-beda, maka frekwensi fungsi-fungsi (waves) dipartisi kedalam suatu oktaf yang berurutan (frequency bands). Untuk efisiensi dalam perhitungan, frekwensi dipartisi dengan menggunakan kelipatan 2, sehingga diperoleh suatu fungsi-fungsi (small waves).

$$\psi(2^j x-k), \text{ dengan } j,\ k \in Z \qquad (3.1)$$

Ternyata (3.1) diperoleh dari sebuah fungsi tunggal (wavelet) $\psi(x)$ dengan sebuah dilasi biner (yaitu dilasi oleh 2^j) dan suatu translasi diadik $k/2^j$.

Jadi perhatian akan dipusatkan dalam *fungsi-fungsi wavelet* ψ dengan dilasi-dilasi biner dan translasi-translasi diadik untuk menyatakan semua fungsi-fungsi dalam $L^2(R)$.

Deret Wavelet

Definisi:

Suatu fungsi $\psi \in L^2(R)$ disebut *wavelet ortogonal* jika keluarga fungsi $\{\psi_{j,k}\}$ yang didefinisikan sebagai $\psi_{j,k}(x) = w^{j/2}\psi(2^j x\text{-}k)$ merupakan basis ortonormal untuk $L^2(R)$ yaitu:

(a) $<\psi_{j,k}(x), \psi_{m,n}(x)> = \delta_{j,m}\,\delta_{k,n}$ (3.2)

dengan $\delta_{j,k} = \begin{cases} 1, \text{ jika } j = k \\ 0, \text{ jika } j \neq k \end{cases}$ $j,k,m,n \in Z$ (disebut simbol Kronecker) dan

(b) setiap $f \in L^2(R)$ dapat ditulis dalam bentuk *deret wavelet*

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{jk}\psi_{jk}(x) \tag{3.3}$$

dengan $c_{j,k} = <f, \psi_{j,k}>$ adalah *koefisien wavelet*.

(c) Konvergensi dari (3.3) dalam $L^2(R)$ ditentukan oleh

$$\lim_{N_1, M_1, N_2, M_2 \to \infty} \left\| f(x) - \sum_{j=-M_2}^{N_2} \sum_{k=-M_1}^{N_2} c_n e^{inx} \right\|_2 = \mathbf{0} \tag{3.4}$$

Contoh:

Untuk mengerti bagaimana analisis wavelet bekerja, adalah baik untuk memulai dengan wavelet sederhana, yaitu wavelet Haar.

Misalkan $I_A(x)$ menyatakan fungsi indikator dari himpunan A yang didefinisikan oleh

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \tag{3.5}$$

Fungsi Haar (*mother wavelet*) $\psi(.)$ didefinisikan sebagai

$$\psi(x) = I_{[0,\frac{1}{2})}(x) - I_{[\frac{1}{2},1)}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0, \text{ untuk yang lain} & \end{cases} \tag{3.6}$$

dan memenuhi sifat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = 0 \text{ dan } \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^2 dx = 1 \qquad (3.7)$$

Suatu fungsi Haar berhubungan dengan suatu fungsi $\phi(.)$ yang didefinisikan sebagai

$$\phi(x) = I_{[0,1)}(x)\begin{cases} 1, & x \in [0,1) \\ 0, & x \notin [0,1) \end{cases} \qquad (3.8)$$

selanjutnya $\phi(.)$ disebut *fungsi skala Haar (father wavelet)*.

Wavelet induk dan fungsi skala Haar memenuhi identitas

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x-1) \text{ dan } \phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x-1) \qquad (3.9)$$

dan fungsi skala $\phi(x)$ memenuhi sifat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = 1 \text{ dan } \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^2 dx = 1 \qquad (3.10)$$

Jika $j \in Z$ menyatakan *indeks dilasi* dan $k \in Z$ menyatakan *indeks translasi*, maka setiap wavelet yang lahir dari mother wavelet $\psi(x)$ akan diindeks oleh j dan k dan dinyatakan dengan

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k) \qquad (3.11)$$

Setiap wavelet Haar memenuhi sifat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{jk}(x)dx = 0 \text{ dan } \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{jk}(x)|^2 dx = 1 \qquad (3.12)$$

dan suatu support fungsi wavelet $\psi_{j,k}(x)$ adalah

$$\text{supp } \psi_{j,k}(x) = [k/2^j, (k+1)/2^j) \qquad (3.13)$$

Ini *berarti bahwa suatu wavelet Haar (mother wavelet) membangun suatu sistem fungsi* $\{2^{j/2}\psi(2^j x-k)\}$. Untuk itu dapat ditunjukkan langsung bahwa $\{2^{j/2}\psi(2^j x-k)\}$ adalah basis ortonormal untuk $L^2(R)$.

Transformasi Wavelet

Jika didefinisikan suatu transformasi integral W_ψ pada $L^2(R)$ oleh

$$\left(W_\psi f\right)(b,a) = |a|^{-2/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)dx \tag{3.14}$$

maka koefisien wavelet dalam (3.3) menjadi

$$c_{j,k} = (W_\psi f)(\, k/2^j,\, 1/2^J) \tag{3.15}$$

Transformasi linier W_ψ disebut *transformasi wavelet integral relatif terhadap suatu dasar* ψ. Jadi koefisien wavelet ke (j,k) untuk f diberikan oleh suatu transformasi wavelet integral untuk f yang dievaluasi pada posisi diadik $b = k/2^j$ dengan dilasi biner $a = 2^J$ dimana suatu wavelet ortonormal ψ digunakan untuk membangun suatu deret wavelet (3.3) dan untuk mendefinisikan suatu transformasi wavelet integral (3.14).

DAFTAR PUSTAKA

Bruce, A., Gao, H.Y. (1996). *"applied Wavelet Analysis with S-Plus"*. New York: Springer-Verlag.

Chui, K. (1992). *"An Introduction to Wavelet"*. Boston: Academic Press, Inc.

Kaiser, G. (1994). *"A Friendly Guide to Wavelets"*. Boston: Birkhauser.

Ogden, T.R. (1997). *"Essensial Wavelets for Statistical Aplication and Data Analysis"*. Boston: Birkhauser.

Walker, J.S. (1997). *"Fourier Analysis and Wavelet Analysis"*. Notice of the AMS, June/July, Vol. 44, No. 6.