

## Investigasi Karakteristik Berpikir Matematis Kritis Siswa dalam Menyelesaikan Masalah Matematis Non Rutin

Aiyub Aiyub<sup>1</sup> dan Zulkifli Zulkifli<sup>2</sup>

<sup>1&2</sup> Prodi Pendidikan Matematika Universitas Islam Negeri Ar-Raniry Banda Aceh

Email: aiyub@ar-raniry.ac.id

**Abstrak.** Dalam makalah ini, kami melaporkan temuan dari sebuah studi kasus yang berusaha untuk mengidentifikasi karakteristik Berpikir Matematis Kritis (BMK) siswa dalam menyelesaikan masalah matematis non rutin. Karakteristik BMK awalnya dihasilkan dari sintesis literatur penelitian yang relevan dan di validasi menggunakan metodologi studi kasus terhadap siswa kelas 8 di salah satu SMP di Banda Aceh. Makalah ini memberikan kerangka kerja untuk BMK yang disintesis dari literatur dan studi kasus dari seorang siswa untuk memberikan bukti tentatif bahwa penggunaan kemampuan BMK oleh siswa dapat diidentifikasi. Tujuan jangka panjang dari penelitian ini adalah untuk mengeksplorasi potensi untuk mempromosikan kemampuan BMK siswa dengan cara yang ditargetkan.

**Kata Kunci:** Berpikir Matematis, Berpikir Kritis, Masalah Matematis

### Pendahuluan

Telah ditetapkan dengan baik, bahwa anak-anak mulai menggunakan keterampilan berpikir matematis dari usia muda (misalnya, Bobis et al., 2005; Doig & Ompok, 2010). Bukti untuk ini terutama ditemukan dalam studi yang melihat cara siswa belajar matematika (Clements & Sarama, 2020; Clarke, Clarke & Roche, 2011). Konsisten dengan perspektif ini, saran saat ini tentang pengembangan kemampuan berpikir matematis dalam konteks pembelajaran awal adalah bahwa instruksi harus mengadopsi pendekatan investigasi untuk mempromosikan pemahaman yang mendalam dan hubungan antara ide-ide matematika (D. Clements, 2020; Sarama et al., 2012). Kebutuhan untuk mengadopsi pendekatan investigasi, sebagai sarana untuk mempromosikan kemampuan berpikir matematis, didukung lebih lanjut oleh kurikulum dan kebijakan pendidikan (Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia: Nomor 37 Tentang Perubahan Kurikulum 2013, 2018). Akibatnya, pendidik di tingkat pendidikan menengah telah bekerja untuk menyiapkan pengalaman belajar matematika yang berfokus pada pendekatan terbuka untuk mendukung kreativitas, imajinasi dan refleksifitas di samping pengembangan konseptual.

Sementara pendidik di tingkat sekolah menengah telah diberikan arahan tentang konten dan proses yang akan diajarkan, serta pendekatan pedagogis yang sesuai, ada saran terbatas dari literatur penelitian tentang bagaimana membuat penilaian tentang tingkat perkembangan kemampuan berpikir matematis siswa. Dengan demikian, sarana terbatas yang tersedia ini untuk membantu guru sekolah menengah dalam mengidentifikasi dan menggambarkan kemampuan berpikir matematis siswa. Adalah penting bahwa alat untuk menilai kemampuan dikembangkan, untuk memberikan umpan balik kepada siswa dan guru tentang kemajuan siswa - menginformasikan keputusan guru tentang pendekatan yang tepat untuk pengajaran.

Tujuan dari makalah ini adalah untuk menguraikan kerangka kerja karakteristik pemikiran matematis kritis siswa diuraikan dan dijelaskan. Konsisten dengan tujuan ini, kami akan menjawab pertanyaan penelitian berikut. Apa karakteristik yang dapat diamati dari pemikiran matematis kritis siswa? Dalam menjawab pertanyaan ini, kami akan (1) memberikan sintesis literatur terkini terkait dengan pemikiran matematis kritis siswa; (2) memperluas sintesis untuk mendefinisikan berpikir kritis matematis; (3) menyajikan studi kasus sebagai contoh ilustratif kategori dalam kerangka berpikir matematis kritis; dan (4) mendiskusikan potensi untuk penelitian lebih lanjut.

## Berpikir Matematis

Memajukan berpikir matematika siswa telah menjadi fokus penelitian dalam beberapa tahun terakhir (misalnya, (Carpenter et al., 2017); Breen & O'Shea, 2010; Fraivillig et al., 1999). Sementara perspektif konsepsi pemikiran matematika di lapangan sangat luas, tampaknya menyatu di sekitar sejumlah prinsip utama: anak-anak membutuhkan pengetahuan matematika (Burton 1984); pemahaman dasar tentang konsep matematika (Burton, 1984); dan kesempatan untuk terlibat dalam pembelajaran matematika dengan cara yang berbeda, semua dalam lingkungan belajar yang mendorong perkembangan matematika (Ginsburg et al., 2006). Berpikir matematika lebih mengacu pada "melakukan" matematika daripada menghafal rumus atau penerapan prosedur (Stein, Grover, & Henningsen, 1996) dan melibatkan pemecahan masalah, penalaran dan pemikiran kritis. Karakteristik utama yang mendemonstrasikan pemikiran matematis telah disintesis dari literatur penelitian yang relevan seperti, prosedur penghubung, penanganan masalah kompleks dengan cara baru, penalaran dan memberi alasan (Tabel 1, # 1-4).

Penelitian yang dilakukan oleh Cengiz, Kline, & Grant, (2011) menyelidiki jenis tugas yang digunakan untuk memperluas pemikiran dengan anak-anak di kelas 1 - 4. Strategi yang diamati oleh para peneliti ini menemukan bahwa guru mengundang anak untuk memberikan evaluasi pembelajaran mereka yang akan memungkinkan untuk refleksi dan berbagi ide atau strategi (Tabel 1, # 5). Strategi untuk mendorong penalaran juga diteliti dan ditemukan bahwa pertanyaan menyelidik guru seperti "Apa yang membuat Anda mengatakan itu? Bagaimana Anda tahu? Mengapa Anda mengira demikian? " (Cengiz, Kline, & Grant, 2011) membangkitkan pemikiran anak-anak. Jadi, bagaimana tugas dirancang sangat penting untuk mengungkap pemikiran matematis anak-anak - mengharuskan anak-anak untuk bernalar dan berpikir secara matematis (Stein Grover & Henningsen, 1996). Ini termasuk tugas-tugas terbuka yang memiliki banyak jawaban, banyak model representasi dan khususnya kesempatan bagi anak-anak untuk menjelaskan dan membenarkan pemikiran mereka.

Bagaimana tugas dilaksanakan adalah aspek penting dalam membangkitkan pemikiran matematis anak-anak. Sebuah studi oleh Fraivillig, Murphy dan Fuson (1999) dari anak-anak kelas satu dan guru melihat praktik guru dan menemukan guru menggunakan strategi memunculkan, mendukung dan memperluas dengan anak-anak untuk memfasilitasi pemikiran matematika mereka. Studi tersebut menemukan bahwa dengan guru yang mempromosikan pemikiran siswa, kemampuan berpikir matematis berikut muncul dari siswa: mendeskripsikan solusi (# 7); menguraikan ide (# 7); mengklarifikasi solusi sendiri (# 7); menggeneralisasi seluruh konsep (# 1); mencatat hubungan (# 1); dan pertimbangan solusi alternatif (# 6). Persamaan antara penelitian yang diteliti sejauh ini, menemukan bahwa agar anak-anak dapat berpikir secara matematis, guru memiliki peran penting sebagai pemandu, agar pemikiran tersebut muncul. Ciri-ciri berpikir matematis dirangkum pada Tabel 1.

**Tabel 1 Karakteristik yang Mendemonstrasikan Pemikiran Matematis**

No	Karakteristik Berpikir Matematis	Sumber Referensi
1	Menghubungkan prosedur / mencatat hubungan / menggeneralisasikan seluruh konsep	(Fraivillig et al., 1999; Stein et al., 1996)
2	Menyelesaikan masalah kompleks dengan cara baru	(Stein et al., 1996)
3	Penalaran	(Cengiz et al., 2011; Jacobs et al., 2010; Stein et al., 1996)
4	Memberi alasan	(Jacobs et al., 2010; Stein et al., 1996)
5	Mengevaluasi	(Cengiz et al., 2011)
6	Mempertimbangkan metode / strategi / solusi alternatif lain	(Cengiz et al., 2011; Fraivillig et al., 1999)
7	Menjelaskan solusi / Klarifikasi solusi / Menguraikan gagasan	(Fraivillig et al., 1999).

### Berpikir Matematika Kritis

Stenberg (1986) mengidentifikasi konstruksi berpikir kritis sebagai lensa untuk mendapatkan wawasan yang lebih mendalam tentang pemikiran matematika siswa. Menurut Sternberg (1986), berpikir kritis mencakup "proses mental, strategi, dan representasi yang digunakan orang untuk memecahkan masalah, membuat keputusan, dan mempelajari konsep baru. Selain itu, berpikir kritis mencakup membangun pengetahuan, membandingkan dan mengidentifikasi membedakan, mendukung ide dengan alasan dan contoh, serta mempertimbangkan solusi alternatif (Florea & Hurjui, 2015). Pentingnya berpikir kritis dapat ditemukan di banyak dokumen pendidikan dan penilaian internasional seperti Program untuk Penilaian Siswa Internasional (PISA) (Organisasi untuk Kerja Sama dan Pembangunan Ekonomi, 2018). Meskipun berpikir matematis dan pemikiran kritis memiliki kesamaan yang cukup besar, keduanya berbeda pada tingkat detail (Monteleone et al., 2018). Penyelarasan antara berpikir matematis dan berpikir kritis disajikan pada Tabel 2. Kolom tambahan, berjudul Kemampuan Berpikir Matematis Kritis memberikan detail fitur tambahan yang dapat diamati dari penyelarasan ini.

**Tabel 2 Menyelaraskan Pemikiran Kritis dan Berpikir Matematis**

<b>Karakteristik Berpikir Matematis dari Tabel 1</b>	<b>Kemampuan Berpikir Kritis</b>	<b>Kemampuan Berpikir Matematis Kritis</b>
Menghubungkan prosedur/ mencatat hubungan	Menghasilkan dan mengevaluasi pengetahuan; Terapkan ide-ide baru ke konteks tertentu	Menggunakan pemahaman matematika dan lainnya untuk menghasilkan, mengevaluasi, menghubungkan, dan menciptakan ide-ide baru
Mengatasi masalah kompleks dengan cara baru	Cari kemungkinan; Pertimbangkan alternatif; Imajinasi; Inovasi; Uji	Mengidentifikasi dan melakukan banyak cara untuk memecahkan masalah matematika
Penalaran	Alasan; Logika	Memberikan alasan atau penilaian
Memberi alasan atau penilaian	Memperjelas konsep dan ide; Menafsirkan; Urutan; Mengeneralisasi	Menggunakan strategi matematika untuk membuktikan bahwa jawabannya mungkin
Mengevaluasi	Gunakan bukti untuk mendukung argumen; Tarik kesimpulan yang masuk akal; Evaluasi	Mengevaluasi diri, menggunakan bukti dan penalaran matematis
Mempertimbangkan metode / strategi / solusi alternatif lain	Menyelesaikan masalah; Akal; Menganalisa; Membandingkan	Mengidentifikasi dan melakukan banyak cara untuk memecahkan masalah matematika
Menjelaskan solusi / Klarifikasi solusi / Menguraikan gagasan	Keterampilan dan strategi berpikir; Menjelaskan; Pertanyaan; Mengambil kesimpulan; Hipotesis; Menilai	Dibangun di atas ide melalui penjelasan, pertanyaan, kesimpulan, hipotesis dan penilaian

Keselarasan antara berpikir matematis dan kemampuan berpikir kritis ditampilkan pada Tabel 2 dan menghasilkan definisi berpikir matematis kritis (BMK) secara keseluruhan. Poin-poin berikut memberikan ringkasan BMK menggunakan pengetahuan matematika dan proses matematika untuk:

- Gunakan pemahaman matematika dan lainnya untuk menghasilkan, mengevaluasi, menghubungkan dan menciptakan ide-ide baru;
- Mengidentifikasi dan melakukan banyak cara untuk memecahkan masalah matematika;
- Memberikan alasan atau penilaian;
- Gunakan strategi matematika untuk membuktikan bahwa jawabannya mungkin;

- Evaluasi diri, menggunakan bukti dan penalaran matematis; dan
- Membangun ide melalui penjelasan, pertanyaan, inferensi, hipotesis dan penilaian.

### **Pendekatan Metodologi**

Untuk menjawab pertanyaan penelitian tentang karakteristik pemikiran matematis kritis siswa, metodologi studi kasus digunakan untuk mendapatkan wawasan tentang strategi matematika canggih seorang siswa ketika terlibat dengan tugas-tugas terbuka tingkat tinggi. Studi kasus dipilih karena data diambil dari sistem terbatas (Stake, 1995); satu kelas siswa SMP.

### **Seleksi Peserta**

Data untuk penelitian ini mencakup empat sumber utama: (1) catatan lapangan observasi kelas; (2) wawancara kelompok fokus semi-terstruktur; dan (3) wawancara guru kelas 8 SMP; dan (4) wawancara dengan anak-anak kelas 8 SMP. Waktu penelitian ini dilakukan pada awal tahun ajaran 2022/2023. Penelitian ini mencakup seluruh kelas 8 pada salah satu SMP di Banda Aceh, dan didasarkan pada aktivitas yang berkaitan dengan bilangan rasional dan pola bilangan. Kemampuan BMK yang tercantum dalam Tabel 2 digunakan oleh peneliti sebagai lensa untuk mengidentifikasi siswa-siswa yang mempresentasikan kemampuan BMK. Setiap anak di kelas ditanyai oleh peneliti tentang pembelajaran mereka selama pembelajaran dengan menggunakan pertanyaan menyelidik atau mendorong (Rigelman, 2007) berdasarkan kemampuan BMK. Ringkasan tanggapan mereka direkam dalam video. Catatan lapangan termasuk pengamatan yang dilakukan oleh peneliti selama pelajaran kelas diinformasikan oleh kerangka BMK. Berdasarkan catatan observasi dan tanya jawab di kelas, 32 anak yang menunjukkan potensi BMK mengambil bagian dalam 3 kelompok fokus terpisah. Kelompok fokus didasarkan pada pembelajaran matematika yang diikuti anak-anak selama pelajaran yang dipimpin oleh guru kelas. Matematika meliputi: pola bilangan dan bilangan rasional. Peneliti mengajukan pertanyaan sehubungan dengan tugas matematika yang dirancang oleh guru, untuk memastikan tingkat penalaran matematika siswa. Contoh pertanyaan seperti itu termasuk: Bagaimana Anda menyelesaikannya? Apa yang akan terjadi jika ...? Apakah ada cara lain untuk melakukan ini?

Seorang subjek penelitian S1 dipilih untuk studi kasus ilustratif, yang dilaporkan di sini, berdasarkan minat tinggi yang dia tunjukkan dalam tugas-tugas investigasi selama pelajaran yang diamati dan wawasan yang ditunjukkan selama wawancara kelompok fokus tindak lanjut. Wawancara Subjek S1 didasarkan pada pedoman wawancara semi-terstruktur yang mencakup 12 pertanyaan terbuka yang ditujukan untuk mendorong respons yang menunjukkan pemikiran matematis kritis siswa. Setiap pertanyaan dirancang untuk memungkinkan untuk muncul karakteristik BMK tertentu, seperti yang diidentifikasi dalam Tabel 2, Video merekam penelitian dan peneliti mentranskrip wawancara dengan subjek S1. Setiap tanggapan dipetakan terhadap kemampuan BMK untuk menentukan cakupan pengembangan ini.

### **Hasil - Berpikir Matematika Kritis Subjek S1**

Pada bagian ini, contoh ilustratif disajikan berdasarkan tiga dari delapan pertanyaan dari wawancara Jordan. Ketiga pertanyaan ini dipilih untuk diskusi karena memberikan karakteristik pemikiran matematis kritis yang dapat diamati dengan jelas. Tanggapan S1 dipetakan terhadap karakteristik BMK Kunci (Tabel 2).

#### **Pertanyaan**

Pertanyaan ini mengharuskan subjek penelitian menentukan bukti apakah semua palindrom 4 angka seperti 2112 habis di bagi 11 atau tidak.

Tabel 3: Tanggapan Subjek S1 terhadap Pertanyaan 1

Instruksi Pertanyaan CMT	Respons Subjek S1 dalam Interaksi Kelas	Respon Subjek S1 dalam menjawab Tes
Mana saja palindrom 4 angka lainnya, apakah bisa dibagi 11?	<p>“Apakah kamu akan memberiku penggaris? Anda tidak dapat melipat dinding sehingga Anda tidak dapat melipat kertas ini. Saya akan menggambar garis (diagonal) di sini dan garis lain (diagonal) di sini dan hanya untuk membuktikannya kepada Anda, saya akan menggambar garis lain dengan cara ini (secara horizontal) dan garis lain dengan cara ini (secara vertikal), yaitu di tengah (menunjuk ke mana garis berpotensi)”.</p>	
Apa yang dapat dilakukan untuk menunjukkan bahwa semua palindrom 4 angka habis dibagi 11?		
Apa yang dapat anda simpulkan dari pola hubungan yang dapat disusun?.		
Bagaimana Anda bisa menunjukkan bahwa semua palindrom 4 angka habis dibagi 11?		

Karakteristik BMK utama:

Menggunakan pemahaman matematika dan lainnya untuk menghasilkan, mengevaluasi, menghubungkan, dan menciptakan ide-ide baru

Mengidentifikasi dan melakukan banyak cara untuk memecahkan masalah matematika

Memberikan alasan atau penilaian

Menggunakan strategi matematika untuk membuktikan bahwa jawabannya mungkin

Mengevaluasi diri, menggunakan bukti dan penalaran matematis

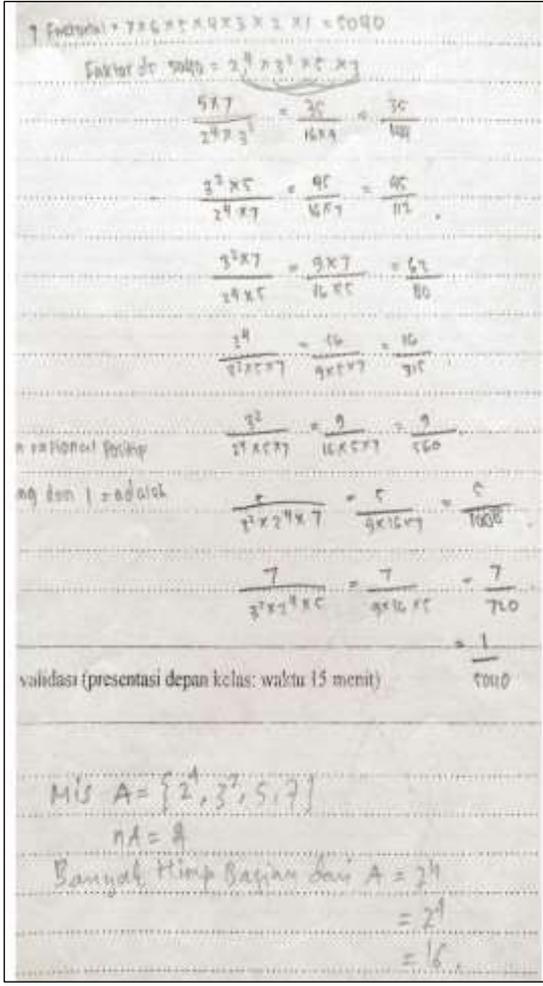
Setelah beberapa penyelidikan dari peneliti, termasuk petunjuk untuk menggunakan pola dari palindrom 4 angka, subjek S1 mampu menghasilkan strategi matematika untuk pertanyaan ini dengan menyusun pernyataan atau kalimat matematika yang menunjukkan suatu palindrom 4 angka memiliki faktor 11. Keselarasan respon Subjek S1 dengan kemampuan BMK adalah sebagai berikut:

- Estimasi: Menentukan beberapa contoh dari palindrom 4 angka.
- Memahami prinsip/mencatat hubungan: Menggunakan pola dari palindrom 4 angka untuk menyusun pernyataan atau kalimat matematika.
- Menawarkan pendapat: Mengambil kesimpulan sementara bahwa suatu palindrom 4 angka dapat dibagi 11 karena dapat ditunjukkan memiliki faktor 11.
- Penalaran: Membuktikan bahwa semua palindrom 4 angka habis dibagi 11.

Masalah matematis non rutin 2

Tugas ini mengharuskan subjek penelitian untuk menentukan banyaknya bilangan rasional dengan kriteria tertentu yang dapat disusun.

Tabel 4 Tanggapan Subjek S1 terhadap Masalah Matematis 2 Instrumen Penilaian Semi Terstruktur One-On-One

Instruksi Pertanyaan BMK	Tanggapan Subjek S1 dalam Wawancara	Respon Subjek S1 dalam Menjawab Test
<p>1. Manakah bilangan rasional positif kurang dari 1 dalam bentuk pecahan paling sederhana yang hasil kali pembilang dari penyebutnya sama dengan <math>6!</math> (baca: 6 faktorial = <math>6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1</math>)?</p> <p>2. Apa saja perbedaan bilangan rasional positif kurang dari 1 dalam bentuk paling sederhana dan bukan bentuk sederhana yang hasil perkalian pembilang dan penyebutnya sama 6 faktorial?</p> <p>3. Bagaimana strategi dapat digunakan untuk menentukan bilangan rasional kurang dari 1 dalam bentuk paling sederhana di atas?</p> <p>4. Apakah ada strategi lain yang dapat digunakan untuk menentukan bilangan rasional positif kurang dari 1 di atas?</p>	<p>“6 faktorial sama dengan 720, berarti pecahan yang memenuhi yaitu <math>1/720</math> dan <math>5/144</math>”</p> <p>“<math>2/360</math> tidak memenuhi karena bukan bentuk pecahan sederhana, dan perbedaannya untuk pecahan sederhana bilangan dari pembilang dan penyebut relatif prima”</p> <p>“Karena bilangan dari pecahan bentuk sederhana adalah relatif prima, maka untuk menentukan bilangan rasional positif kurang dari 1 yang ditanyakan dapat menggunakan bilangan Faktorisasi prima dari 720”</p> <p>“Dapat menggunakan konsep dari banyaknya himpunan bagian dari suatu himpunan”.</p>	 <p>Handwritten work showing the factorization of 720 and the derivation of fractions with numerator and denominator products equal to 720. The work includes the prime factorization <math>720 = 2^4 \times 3^2 \times 5</math>, and lists fractions like <math>1/720</math>, <math>5/144</math>, <math>2/360</math>, <math>3/240</math>, <math>4/180</math>, <math>6/120</math>, <math>8/90</math>, <math>9/80</math>, <math>10/72</math>, <math>12/60</math>, <math>15/48</math>, <math>18/40</math>, <math>20/36</math>, <math>24/30</math>, <math>30/24</math>, <math>36/20</math>, <math>40/18</math>, <math>48/15</math>, <math>60/12</math>, <math>72/10</math>, <math>80/9</math>, <math>90/8</math>, <math>120/6</math>, <math>144/5</math>, <math>180/4</math>, <math>240/3</math>, <math>360/2</math>, and <math>720/1</math>. It also shows a set <math>A = \{2, 3, 5, 7\}</math> and calculates the number of subsets as <math>2^4 = 16</math>.</p>

Tanggapan yang diberikan oleh Subjek S1 untuk masalah matematis 2 melibatkan strategi. Subjek S1 menampilkan kemampuan BMK sesuai dengan yang diharapkan dari anak kelas 7 atau 8, menurut NCTM (2000). Penyelarasan kemampuan berpikir matematis kritis menampilkan pemahaman subjek S1 dengan:

- Mengklasifikasikan: Membedakan bilangan rasional positif kurang dari 1 bentuk pecahan sederhana dan bukan bentuk sederhana.

- Asumsi: Mempertimbangkan bahwa bilangan rasional positif kurang dari 1 bentuk sederhana mempunyai sifat bilangan pembilang dan penyebutnya relatif prima.
- Memahami prinsip/mencatat hubungan: Memahami hubungan konsep relatif prima dengan bilangan Faktorisasi prima dan menerapkannya pada situasi baru
- Menawarkan pendapat dengan alasan: Mengartikulasikan bahwa jika Anda akan menentukan bilangan rasional kurang dari 1 yang ditanyakan dapat menggunakan bilangan hasil Faktorisasi prima dari 720 yaitu  $2^4 \times 3^2 \times 5$ .
- Menawarkan pendapat dengan alasan: Dimasukkannya uang memberikan situasi kehidupan nyata

## Kesimpulan

Makalah ini telah menjawab pertanyaan penelitian: Apa saja karakteristik pemikiran matematis kritis anak-anak? Dalam kasus yang disajikan di sini, tanggapan subjek S1 menunjukkan bukti karakteristik BMK seperti penalaran, mencatat hubungan, dan mengklasifikasikan. Karakteristik berpikir matematis yang diamati ini sesuai dengan temuan penelitian sebelumnya bahwa anak mampu berpikir matematis kritis (Bobis et al., 2005; Doig & Ompok, 2010). Studi ini mengambil langkah kecil untuk memperluas pengetahuan sebelumnya di bidang pemikiran matematis kritis siswa dengan menyediakan kerangka kerja yang menunjukkan potensi untuk bertindak sebagai dasar untuk mengembangkan perangkat untuk menentukan kemampuan berpikir matematis kritis siswa.

Penelitian ini merupakan langkah awal dalam memajukan pemahaman berpikir tingkat tinggi anak-anak muda dalam matematika. Dengan demikian, penelitian ini memiliki implikasi bagi guru dan pembuat kebijakan yang dapat meninjau cara pembelajaran dan penilaian matematika dirancang untuk siswa. Sementara penelitian ini memberikan bukti tentang bagaimana tanggapan siswa dapat menampilkan pemikiran matematika kritis dan berbagai strategi matematika, tidak ada upaya yang dilakukan untuk melakukan generalisasi karena tujuan makalah ini adalah untuk berusaha memahami. Temuan awal ini, bagaimanapun, akan menginformasikan studi yang lebih besar dari mana data yang digunakan di sini bersumber dan memberikan ruang lingkup lebih lanjut untuk menyelidiki bagaimana berpikir matematis kritis siswa dapat dinilai.

## References

- Bobis, J., Clarke, B., Clarke, D., Thomas, G., Wright, B., Young-Loveridge, J., & Gould, P. (2005). Supporting teachers in the development of young children's mathematical thinking: Three large scale cases. *Mathematics Education Research Journal*, 16(3), 27–57. <https://doi.org/10.1007/BF03217400>
- Burton, L. (1984). Mathematical Thinking: The Struggle for Meaning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(1), 35-49. doi:10.2307/748986
- Carpenter, T. P., Franke, M. L., Johnson, N. C., Turrou, A. C., & Wager, A. A. (2017). *Young Children's Mathematics: Cognitively Guided Instruction in Early Childhood Education*. Heinemann.
- Clarke, D., Clarke, B., & Roche, A. (2011). Building teachers' expertise in understanding, assessing and developing children's mathematical thinking: the power of task-based, one-to-one assessment interviews. *ZDM – Mathematics Education*, 43(6-7), 901-913.
- Cengiz, N., Kline, K., & Grant, T. J. (2011). Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(5), 355-374. doi:10.1007/s10857-011-9179-7
- Clements, D. (2020). Mathematics in the Preschool. *Teaching Children Mathematics*, 7(5), 270–275.

<https://doi.org/10.5951/tcm.7.5.0270>

- Clements, D. H., & Sarama, J. (2020). Learning and Teaching Early Math: The Learning Trajectories Approach, 2nd Edition. *Learning and Teaching Early Math, May*. <https://doi.org/10.4324/9781003083528>
- Clements, D. H. (2001). Mathematics in the preschool. *Teaching children mathematics*, 7(5), 270
- Doig, B., & Ompok, C. (2010). Assessing young children's mathematical abilities through games. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 8, 228–235. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.031>
- Florea, N. M., & Hurjui, E. (2015). Critical Thinking in Elementary School Children. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 180, 565-572. doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.02.161>
- Fraivillig, J. L., Murphy, L. A., & Fuson, K. C. (1999). Advancing children's mathematical thinking in Everyday Mathematics classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 148–170. <https://doi.org/10.2307/749608>
- Ginsburg, H. P., Cannon, J., Eisenband, J., & Pappas, S. (2006). Mathematical thinking and learning. In *Blackwell handbook of early childhood development* (pp. 208–229). <https://doi.org/10.4324/9781410607218>
- Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C., & Philipp, R. A. (2010). Professional Noticing of Children's Mathematical Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169-202.
- Johnson, L., Adams Becker, S., Cummins, M., Estrada, V., Freeman, A., and Hall, C. (2016). NMC Horizon Report: 2016 Higher Education Edition. Austin, Texas: The New Media Consortium
- Monteleone, C., White, P., & Geiger, V. (2018). *Defining the Characteristics of Critical Mathematical Thinking*. July, 559–566. <https://eric.ed.gov/?id=ED592443>
- Organisation for Economic Co-operation and Development. (2018). *The Programme for International Student Assessment (PISA) 2015: Results in Focus*. France.
- Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia: Nomor 37 Tentang Perubahan Kurikulum 2013, (2018).
- Sarama, J., & Clements, D., H. (2009). Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children: Routledge: *Taylor & Francis Group*.
- Sarama, J., Lange, A. A., Clements, D. H., & Wolfe, C. B. (2012). The impacts of an early mathematics curriculum on oral language and literacy. *Early Childhood Research Quarterly*, 27(3), 489–502. <https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2011.12.002>
- Stake, R. (1995). *The art of case study*. London: SAGE Publications.
- Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: An analysis of Mathematical Tasks Used in Reform Classrooms. *American Educational Research Journal*, 33(2), 455-488.
- Sternberg, R. J. (1986). Critical Thinking: Its Nature, Measurement and Improvement. In *National Institute of Education, Washington, DC*.