Aljabar Kumjian-Pask dari Graf-k Berhingga Baris Tanpa *Sources*

Reza Farhania Dewi*, Rizky Rosjanuardi, Sumanang Muhtar Gozali
Departemen Pendidikan Matematika, Universitas Pendidikan Indonesia
*Surel: rezafarhaniadewi@student.upi.edu

ABSTRAK. Diberikan suatu graf-k berhingga baris tanpa *sources* Λ dan suatu ring komutatif R dengan unsur kesatuan. Aljabar Kumjian-Pask $KP_R(\Lambda)$ didefinisikan sebagai aljabar-R universal yang analog dengan aljabar graf $C^*(\Lambda)$. Untuk setiap Λ yang diberikan, dapat dikonstruksi aljabar Kumjian-Pask $KP_R(\Lambda)$ sebagai kuosien dari aljabar-R bebas pada $X = \Lambda^0 \cup \Lambda^{\neq 0} \cup G(\Lambda^{\neq 0})$ modulo ideal I yang dibangun oleh suatu himpunan sedemikian sehingga memenuhi relasi Kumjian-Pask.
Kata kunci: graf-k berhingga baris tanpa *sources*, aljabar Kumjian-Pask, aljabar-R, kuosien, aljabar-R bebas, ideal, relasi Kumjian-Pask.

ABSTRACT. *Given a row-finite k-graph without sources Λ and a unital commutative ring R. Kumjian-Pask algebra $KP_R(\Lambda)$ is a universal R-algebra analogous with the graph algebra $C^*(\Lambda)$. For every given Λ, we can construct a Kumjian-Pask algebra $KP_R(\Lambda)$ as a quotient of free R-algebra on $X = \Lambda^0 \cup \Lambda^{\neq 0} \cup G(\Lambda^{\neq 0})$ modulo ideal I generated by a set such that the ideal satisfied Kumjian-Pask relations.*
Keywords: *row-finite k-graph without sources, Kumjian-Pask algebra, R-algebra, quotient, free R-algebra, ideal, Kumjian-Pask relations.*

1 Pendahuluan

Aljabar-C^* dari graf berarah tak berhingga pertama kali dipelajari sekitar tahun 1990an [12, 11] sebagai generalisasi aljabar Cuntz-Krieger dari matriks berhingga $\{0, 1\}$ [8]. Aljabar lintasan Leavitt dipelajari mulai tahun 2005 [1, 2] sebagai bentuk analogi aljabar murni dari aljabar-C^* graf. Sejauh ini aljabar-C^* graf dan aljabar lintasan Leavitt telah dikaji secara intensif oleh banyak peneliti. Keduanya kini telah mempunyai teori-teori struktur pokok dan telah terbukti sebagai sumber yang kaya dengan contoh-contoh yang menarik.

Analogi dari aljabar Cuntz-Krieger dengan rank lebih tinggi pertama kali diteliti oleh Robertson dan Steger [16, 17]. Tidak lama setelah itu, Kumjian dan Pask [10] memperkenalkan graf dengan rank lebih tinggi (atau graf-k) untuk memberikan model yang dapat divisualisasi untuk aljabar Robertson dan Steger. Graf-k dipandang sebagai graf berarah dengan dimensi k. Aljabar-C^* dari graf-k [10] selanjutnya didefinisikan sebagai aljabar-C^* universal yang dibangun oleh keluarga isometri parsial sedemikian sehingga memenuhi relasi yang analog dengan relasi Cuntz-Krieger.

Pada tahun 2011, Pino, Clark, an Huef, dan Raeburn memperkenalkan konsep aljabar Kumjian-Pask. Artikel yang membahas konsep ini dipublikasikan pada tahun 2013 [14]. Aljabar Kumjian-Pask merupakan analogi aljabar murni untuk konsep aljabar-C^* graf-k pada [10]. Dalam hal ini, lebih khusus terkait dengan graf-k berhingga baris tanpa *sources*. Mulai tahun 2013, konsep aljabar Kumjian-Pask telah diperluas atas graf-k *locally convex* [7, 19] dan graf-k *finitely aligned* [6, 13].

Aljabar Kumjian-Pask dari graf-k Λ yang berhingga baris tanpa *sources* atas lapangan bilangan kompleks $\mathbb{C}$ telah ditunjukkan sebagai subaljabar-* padat (*dense*) pada aljabar graf $C^*(\Lambda)$ [14]. Aljabar Kumjian-Pask dari graf-k berhingga baris tanpa *sources* telah banyak menjadi perhatian kalangan ilmuwan aljabar operator, di antaranya [3, 4, 5, 9, 18, 20]. Dalam artikel ini akan dibahas gambaran konsep aljabar Kumjian-Pask dari graf-k berhingga baris tanpa *sources* serta teknik konstruksinya.

2 Graf-k

Berdasarkan [15], suatu kategori $\mathcal{C}$ terdiri atas himpunan objek $\mathcal{C}^0$ dan himpunan morfisma $\mathcal{C}$ yang dilengkapi dengan dua buah fungsi $r, s : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^0$ berturut-turut sebagai pemetaan kodomain dan domain dari morfisma di $\mathcal{C}$. Morfisma identitas pada objek v dinotasikan ι_v. Didefinisikan komposisi sebagai operasi antar morfisma $(f, g) \mapsto fg$ dengan $r(g) = s(f)$ sedemikian sehingga memenuhi:

- $r(fg) = r(f)$ dan $s(fg) = s(g)$;
- $(fg)h = f(gh)$ jika $s(f) = r(g)$ dan $s(g) = r(h)$;
- $r(\iota_v) = v = s(\iota_v)$ dan $\iota_v f = f$, $g\iota_v = g$ jika $r(f) = v$ dan $s(g) = v$.

Jika $\mathcal{C}$ dan $\mathcal{D}$ merupakan kategori, *functor* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ adalah pemetaan yang memasangkan objek dengan objek dan morfisma dengan morfisma sedemikian sehingga mempertahankan pemetaan kodomain, pemetaan domain, dan komposisi, serta memenuhi $F(\iota_v) = \iota_{F(v)}$.

Definisi 2.1 [10, Definition 1.1]**.** Untuk suatu bilangan bulat positif k, pandang $\mathbb{N}^k$ sebagai kategori dengan satu objek. Graf dengan rank k atau graf-k adalah suatu kategori terbilang $\Lambda = (\Lambda^0, \Lambda, r, s)$ dilengkapi dengan *functor* $d : \Lambda \to \mathbb{N}^k$, disebut pemetaan derajat, yang memenuhi sifat faktorisasi berikut: jika $\lambda \in \Lambda$ dan $d(\lambda) = m + n$ untuk suatu $m, n \in \mathbb{N}^k$, maka terdapat $\mu, \nu \in \Lambda$ secara tunggal sedemikian sehingga $d(\mu) = m$, $d(\nu) = n$, dan $\lambda = \mu\nu$. Morfisma antara graf-k (Λ_1, d_1) dan (Λ_2, d_2) adalah *functor* $f : \Lambda_1 \to \Lambda_2$ yang mempertahankan derajat.

Notasi ([10, 14, 6]). Elemen pada Λ^0 selanjutnya dinamakan sebagai *simpul*. Untuk $n \in \mathbb{N}^k$ didefinisikan

$$\Lambda^n := \{\lambda \in \Lambda : d(\lambda) = n\}$$

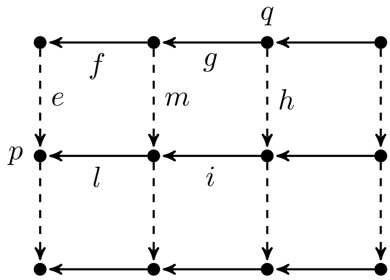
dan setiap $\lambda \in \Lambda^n$ disebut sebagai *lintasan berderajat* n. Sifat faktorisasi mengakibatkan bahwa untuk sembarang $v \in \Lambda^0$, v dapat diidentifikasi dengan morfisma identitas ι_v. Untuk setiap $\lambda \in \Lambda$, domain dari λ disebut sebagai *source* yang dinotasikan dengan $s(\lambda)$ dan kodomainnya disebut sebagai *range* yang dinotasikan $r(\lambda)$. Untuk suatu $v \in \Lambda^0$ dan $n \in \mathbb{N}^k$, didefinisikan:

$$v\Lambda^n := \{\lambda \in \Lambda^n : r(\lambda) = v\}.$$

Suatu graf-k Λ dapat dipandang sebagai kerangka-1. Himpunan objek Λ^0 dipandang sebagai simpul-simpul pada graf berarah, pilih warna sebanyak k yaitu $c_1, c_2, \ldots, c_k$, selanjutnya untuk setiap $\lambda \in \Lambda^{e_i}$ digambarkan sisi berarah dengan warna c_i dari $s(\lambda)$ ke $r(\lambda)$. Graf berarah E yang diwarnai tersebut kemudian disebut kerangka-1 dari Λ.

Contoh 2.2 [14, Example 2.2]**.** Misalkan $\Omega_k^0 := \mathbb{N}^k$, $\Omega_k := \{(p, q) \in \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}^k : p \leq q\}$. Didefinisikan $r, s : \Omega_k \to \Omega_k^0$ dengan $r(p, q) := p$ dan $s(p, q) := q$, komposisi $(p, q)(q, r) := (p, r)$, dan $d : \Omega_k \to \mathbb{N}^k$ dengan $d(p, q) := q - p$. Maka $\Omega_k = (\Omega_k^0, \Omega_k, r, s, d)$ adalah suatu graf-k.

Dengan cara serupa, untuk $m \in \mathbb{N}^k$ didefinisikan $\Omega^0_{k,m} := \{p \in \mathbb{N}^k : p \leq m\}$ dan $\Omega_{k,m} := \{(p,q) \in \Omega^0_{k,m} \times \Omega^0_{k,m} : p \leq q\}$. Dengan mendefinisikan r, s, dan d yang sama, maka $\Omega_{k,m}$ adalah graf-k. Sebagai contoh, kerangka-1 dari $\Omega_{2,(3,2)}$ adalah



dengan panah biasa dan panah putus-putus mengindikasikan warna yang berbeda. Pandang lintasan-lintasan sebagai persegi panjang. Lintasan (p,q) dengan *source* q dan *range* p adalah persegi panjang berukuran 2×1 di bagian kiri atas, dan jalur berbeda efg, lmg, lih dari q menuju p merepresentasikan faktorisasi berbeda dari (p,q).

Definisi 2.3 [10, 14]**.** Suatu graf-*k* Λ dikatakan berhingga baris jika $v\Lambda^n$ berhingga untuk setiap $v \in \Lambda^0$ dan $n \in \mathbb{N}^k$. Λ dikatakan tidak mempunyai *sources* jika $v\Lambda^n \neq \emptyset$ untuk setiap $v \in \Lambda^0$ dan $n \in \mathbb{N}^k$. Oleh karena itu, graf-k berhingga baris tanpa sources ialah suatu graf-k Λ sedemikian sehingga

$$0 \neq |v\Lambda^n| < \infty, \text{ untuk setiap } v \in \Lambda^0 \text{ dan } n \in \mathbb{N}^k.$$

Definisi 2.4 [10, 14]**.** Misalkan Λ adalah suatu graf-k berhingga baris tanpa *sources*. Ruang lintasan tak berhingga dari Λ didefinisikan sebagai

$$\Lambda^\infty := \{x : \Omega_k \to \Lambda | x \text{ morfisma graf-}k\},$$

dan $x \in \Lambda^\infty$ disebut sebagai lintasan tak berhingga di Λ. Karena setiap objek $m \in \Omega_k$ diidentifikasi dengan morfisma identitas (m,m) di m, maka $x(m)$ dituliskan untuk simpul $x(m,m)$. Oleh karena itu, *range* dari suatu lintasan tak berhingga x adalah simpul $r(x) := x(0)$ dan dinotasikan $v\Lambda^\infty := r^{-1}(v)$.

Catatan. Untuk mendukung definisi ini, perhatikan bahwa lintasan $\lambda \in \Lambda^n$ memberikan *functor* $f_\lambda : \Omega_{k,n} \to \Lambda$. Ambil sembarang $0 \leq p \leq q \leq n$. Berdasarkan sifat faktorisasi, terdapat lintasan tunggal $\lambda' \in \Lambda^p$, $\lambda'' \in \Lambda^{q-p}$, dan $\lambda''' \in \Lambda^{n-q}$ sedemikian sehingga $\lambda = \lambda'\lambda''\lambda'''$. Definisikan $f_\lambda(p,q) := \lambda(p,q) := \lambda''$, maka f_λ adalah fungsi yang terdefinisi dengan baik dan mempertahankan derajat. Sifat faktorisasi mengakibatkan bahwa pemetaan $\lambda \mapsto f_\lambda$ adalah bijeksi dari Λ^n onto himpunan *functor* yang mempertahankan derajat dari $\Omega_{k,n}$ ke Λ.

Lema 2.5 [14, Lemma 2.4]**.** *Misalkan* $n(i) \leq n(i+1)$ *di* $\mathbb{N}^k$*,* $n(i)_j \to \infty$ *di* $\mathbb{N}$ *untuk* $1 \leq j \leq k$*, dan* $\lambda_i \in \Lambda^{n(i)}$ *memenuhi* $\lambda_{i+1}(0, n(i)) = \lambda_i$*. Maka terdapat secara tunggal* $y \in \Lambda^\infty$ *sedemikian sehingga* $y(0, n(i)) = \lambda_i$*.*

Lema 2.6 [10, Proposition 2.3]**.**

1. *Untuk* $n \in \mathbb{N}^k$*, terdapat elemen tunggal* $x(0,n) \in \Lambda^n$ *dan* $x(n,\infty) \in \Lambda^\infty$ *sedemikian sehingga* $x = x(0,n)\, x(n,\infty)$*, dengan* $x(n,\infty)$ *dinotasikan untuk* $y \in \Lambda^\infty$ *dengan* $y(p,q) = x(p+n, q+n)$*.*

2. *Misalkan* $\lambda \in \Lambda^n$ *dan* $x \in \Lambda^\infty$ *dengan* $s(\lambda) = r(x)$*. Maka terdapat secara tunggal* $y \in \Lambda^\infty$ *sedemikian sehingga* $y(0,n) = \lambda x(0, n - d(\lambda))$ *untuk* $n \geq d(\lambda)$*, kemudian dituliskan* $\lambda x := y$*.*

3 Aljabar Kumjian-Pask

Definisi 3.1 [14, hlm. 3619]**.** Misalkan Λ merupakan suatu graf-k dan $\Lambda^{\neq 0} := \{\lambda \in \Lambda : d(\lambda) \neq 0\}$. Untuk setiap $\lambda \in \Lambda^{\neq 0}$ didefinisikan *ghost path* λ^*, sedangkan untuk $v \in \Lambda^0$ didefinisikan $v^* := v$. Himpunan *ghost paths* dari Λ dinotasikan sebagai $G(\Lambda)$ atau $G(\Lambda^{\neq 0})$ jika tidak disertakan simpul-simpul. Selanjutnya d, r, dan s pada $G(\Lambda)$ didefinisikan sebagai

$$d(\lambda^*) = -d(\lambda), r(\lambda^*) = s(\lambda), \text{ dan } s(\lambda^*) = r(\lambda).$$

Komposisi pada $G(\Lambda)$ didefinisikan dengan aturan $\lambda^*\mu^* = (\mu\lambda)^*$ untuk $\lambda, \mu \in \Lambda^{\neq 0}$ dengan $r(\mu^*) = s(\lambda^*)$. Sifat faktorisasi pada Λ menginduksi sifat faktorisasi yang serupa pada $G(\Lambda)$.

Definisi 3.2 [14, Definition 3.1]**.** Misalkan Λ merupakan suatu graf-k berhingga baris tanpa *sources* dan R suatu ring komutatif dengan unsur kesatuan. Keluarga Kumjian-Pask-Λ (P,S) pada suatu aljabar-R A terdiri atas dua fungsi $P : \Lambda^0 \to A$ dan $S : \Lambda^{\neq 0} \cup G(\Lambda^{\neq 0}) \to A$ sedemikian sehingga:

(KP1) $\{P_v : v \in \Lambda^0\}$ adalah keluarga idempoten yang saling ortogonal, (KP2) untuk setiap $\lambda, \mu \in \Lambda^{\neq 0}$ dengan $r(\mu) = s(\lambda)$ berlaku

$$S_\lambda S_\mu = S_{\lambda\mu}, S_{\mu^*} S_{\lambda^*} = S_{(\lambda\mu)^*}, P_{r(\lambda)} S_\lambda = S_\lambda = S_\lambda P_{s(\lambda)}, P_{s(\lambda)} S_{\lambda^*} = S_{\lambda^*} = S_{\lambda^*} P_{r(\lambda)},$$

(KP3) untuk setiap $\lambda, \mu \in \Lambda^{\neq 0}$ dengan $d(\lambda) = d(\mu)$ berlaku

$$S_{\lambda^*} S_\mu = \delta_{\lambda,\mu} P_{s(\lambda)},$$

(KP4) untuk setiap $v \in \Lambda^0$ dan $n \in \mathbb{N}^k \setminus \{0\}$ berlaku

$$P_v = \sum_{\lambda \in v\Lambda^n} S_\lambda S_{\lambda^*}.$$

Relasi (KP2) dan (KP4) mengakibatkan bahwa untuk setiap $q \geq d(\lambda) \vee d(\mu)$ berlaku

$$S_{\lambda^*} S_\mu = \sum_{d(\lambda\alpha)=q, \lambda\alpha=\mu\beta} S_\alpha S_{\beta^*}.$$

Teorema 3.3 [14, Theorem 3.4]. *Misalkan Λ merupakan suatu graf-k berhingga baris tanpa sources dan R suatu ring komutatif dengan unsur kesatuan. Maka terdapat suatu aljabar-R $KP_R(\Lambda)$ yang dibangun oleh keluarga Kumjian-Pask-Λ (p, s) sedemikian sehingga jika (Q, T) merupakan suatu keluarga Kumjian-Pask-Λ pada suatu aljabar-R A, maka terdapat secara tunggal homomorfisma aljabar-R $\pi_{Q,T} : KP_R(\Lambda) \to A$ sedemikian sehingga*

$$\pi_{(Q,T)}(p_v) = Q_v, \pi_{Q,T}(s_\lambda) = T_\lambda, \pi_{Q,T}(s_{\mu^*}) = T_{\mu^*}$$

untuk $v \in \Lambda^0$ dan $\lambda, \mu \in \Lambda^{\neq 0}$. Terdapat grading-$\mathbb{Z}^k$ pada $KP_R(\Lambda)$ sehingga

$$KP_R(\Lambda)_n = span_R\{s_\lambda s_{\mu^*} | \lambda, \mu \in \Lambda; d(\lambda) - d(\mu) = n\},$$

dan $rp_v \neq 0$ untuk setiap $v \in \Lambda^0$ dan $r \in R \backslash \{0\}$.

$KP_R(\Lambda)$ selanjutnya disebut sebagai aljabar Kumjian-Pask dari Λ dan (p, s) adalah keluarga Kumjian-Pask-Λ universal.

Alur bukti: Pandang aljabar-R bebas $\mathbb{F}_R(w(X))$ pada $X = \Lambda^0 \cup \Lambda^{\neq 0} \cup G(\Lambda)$. Definisikan I sebagai ideal dari $\mathbb{F}_R(w(X))$ yang dibangun oleh gabungan dari himpunan-himpunan berikut:

- $\{vw - \delta_{v,w}v : v, w \in \Lambda^0\}$;
- $\{\lambda - \mu\nu, \lambda^* - \nu^*\mu^* : \lambda, \mu\nu \in \Lambda^{\neq 0}; \lambda = \mu\nu\}$
  $\cup\{r(\lambda)\lambda - \lambda, \lambda - \lambda s(\lambda), s(\lambda)\lambda^* - \lambda^*, \lambda^* - \lambda^* r(\lambda) : \lambda \in \Lambda^{\neq 0}\}$;
- $\{\lambda^*\mu - \delta_{\lambda,\mu}s(\lambda) : \lambda\mu \in \Lambda^{\neq 0} \mid d(\lambda) = d(\mu)\}$;
- $\{v - \sum_{\lambda \in v\Lambda^n} \lambda\lambda^* : v \in \Lambda^0, n \in \mathbb{N}^k \backslash \{0\}\}$.

Misalkan $q : \mathbb{F}_R(w(X)) \to \mathbb{F}_R(w(X))/I$ adalah pemetaan kuosien. Definisikan $KP_R(\Lambda) := \mathbb{F}_R(w(X))/I$. Maka $\{p_v, s_\lambda, s_{\mu^*}\} := \{q(v), q(\lambda), q(\mu^*)\}$ memberikan keluarga Kumjian-Pask-Λ (p, s) yang dibangun pada $KP_R(\Lambda)$.

Pemetaan derajat memberikan $\mathbb{Z}^k$-*grading* pada $\mathbb{F}_R(w(X))$ yang didefinisikan

$$\mathbb{F}_R(w(X))_n = \left\{ \sum_{w \in w(X)} r_w w : r_w \neq 0 \Rightarrow d(w) := \sum_{i=1}^{|w|} d(w_i) = n \right\}$$

untuk $n \in \mathbb{Z}^k$. Generator dari I adalah homogen, maka I *graded* dan $KP_R(\Lambda)$ *graded* oleh $q(\mathbb{F}_R(w(X))_n)$. Dapat ditunjukkan bahwa $q(\mathbb{F}_R(w(X))_n) = KP_R(\Lambda)_n$.

Konstruksi modul-R bebas dengan basis ruang lintasan tak berhingga untuk menunjukkan bahwa terdapat keluarga Kumjian-Pask (Q, T) sedemikian sehingga rQ_v tak nol untuk setiap r tak nol.

4 Kesimpulan

Sebagai ringkasan, untuk sembarang graf-k Λ yang berhingga baris tanpa *sources* dan ring komutatif R dengan unsur kesatuan, aljabar Kumjian-Pask dari Λ adalah suatu aljabar-R $KP_R(\Lambda)$ yang dibangun oleh keluarga Kumjian-Pask-Λ universal (p, s). Aljabar ini dapat dikonstruksi sebagai grup kuosien $\mathbb{F}_R(w(X))/I$ dengan $\mathbb{F}_R(w(X))$ adalah aljabar-R bebas pada $X := \{\Lambda^0 \cup \Lambda^{\neq 0} \cup G(\Lambda^{\neq 0})\}$ dan $I \subset \mathbb{F}_R(w(X))$ adalah ideal yang dibangun sedemikian sehingga memenuhi relasi (KP1)-(KP4).

Daftar Pustaka

[1] Abrams, G. dan Pino, G. Aranda. (2005). *The Leavitt Path Algebra of a Graph*. Journal of Algebra, 293: 319-334.

[2] Ara, P., Moreno, M.A., dan Pardo, E. (2007). *Nonstable K-theory for Graph Algebras*. Algebras and Representation Theory, 10(2): 157-178.

[3] Brown, Jonathan H. dan an Huef, Astrid. (2012). *The Center of a Kumjian-Pask Algebra*. arXiv: 1209.2627v1 [math.RA].

[4] Brown, Jonathan H. dan an Huef, Astrid. (2015). *The Socle and Semisimplicity of a Kumjian-Pask Algebra*. Communications in Algebra, 43(7): 2703-2723.

[5] Clark, Lisa Orloff., Canto, Cristóbal Gil., dan Nasr-Isfahani, Alireza. (2017). *The Cycline Subalgebra of a Kumjian-Pask Algebra*. Proceedings of the American Mathematical Society, 145(5): 1969-1980.

[6] Clark, Lisa Orloff. dan Pangalela, Yosafat E.P. (2015). *Kumjian-Pask Algebras of Finitely-aligned Higher-rank Graphs*. arXiv: 1512.06547v1 [math.RA].

[7] Clark, Lisa Orloff., Flynn, Claire., dan an Huef, Astrid. (2014). *Kumjian-Pask Algebras of Locally Convex Higher-rank Graph*. Journal of Algebra, 399: 445-474.

[8] Cuntz, Joachim. dan Krieger, Wolfgang. (1980). *A Class of C^*-algebras and Topological Markov Chains*. Inventiones Mathematicae, 56: 251-268.

[9] Kashoul-Radjabzadeh, Maryam., Larki, Hossein., dan Aminpour, Abdolmohammad. (2016). *Prime and Primitive Kumjian-Pask Algebras*. Journal of Algebra and Its Applications, 1750169.

[10] Kumjian, Alex. dan Pask, David. (2000). *Higher-rank Graph C^*-Algebra*. New York Journal of Mathematics, 6: 1-20.

[11] Kumjian, Alex., Pask, David., dan Raeburn, Iain. (1998). *Cuntz-Krieger Algebras of Directed Graphs*. Pacific Journal of Mathematics, 184(1): 161-174.

[12] Kumjian, Alex., Pask, David., Raeburn, Iain., dan Renault, Jean. (1997). *Graphs, Groupoids, and Cuntz-Krieger Algebras*. Journal of Functional Analysis, 144(2): 505-541.

[13] Larki, Hossein. (2017). *Purely Infinite Simple Kumjian-Pask Algebras*. arXiv: 1608.07744v3 [math.RA].

[14] Pino, G. Aranda., Clark, John., an Huef, Astrid., dan Raeburn, Iain. (2013). *Kumjian-Pask Algebras of Higher-rank Graphs*. Transaction of the American Mathematical Society, 365(7): 3613-3641.

[15] Raeburn, Iain. (2005). *Graph Algebras*. Rhode Island: Transaction of the American Mathematical Society.

[16] Robertson, Guyan. dan Steger, Tim. (1996). *C^*-algebras Arising from Group Actions on the Boundary of a Triangle*. Proceedings of the London Mathematical Society, 72: 613-637.

[17] Robertson, Guyan. dan Steger, Tim. (1999). *Affine Buildings, Tiling Systems and Higher-rank Cuntz-Krieger Algebras*. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 513: 115-144.

[18] Rosjanuardi, Rizky. (2013). *Complex Kumjian-Pask Algebras*. Acta Mathematica Sinica, 29(11): 2073-2078.

[19] Rosjanuardi, Rizky. dan Yusnitha, Isnie. (2016). *Kumjian-Pask Algebras of Desourcification*. American Institute of Physics Conference Proceedings, 1708(1), 060006.

[20] Yusnitha, Isnie. dan Rosjanuardi, Rizky. (2016). *Complex Kumjian-Pask Algebras of 2-graphs*. American Institute of Physics Conference Proceedings, 1708(1), 060010.