Jurnal EurekaMatika

Journal homepage: https://ejournal.upi.edu/index.php/JEM

Polinomial Kromatik Graf Tripartit Lengkap

Jafanin Ashril Indarta, Kristina Wijaya, Ikhsanul Halikin dan Kusbudiono*

Graph and Algebra Research Group,
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember

*Correspondence: E-mail: ikhsan.fmipa@unej.ac.id

A B S T R A K

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dan c adalah pewarnaan titik dengan t warna. Pewarnaan titik pada graf G adalah fungsi $c: V(G) \rightarrow \{1,2, \dots, t\}$, sedemikian sehingga $c(u) \neq c(v)$ jika u dan v merupakan dua titik yang bertetangga. Apabila suatu graf dapat diwarnai sejumlah t warna, maka paling sedikit warna yang digunakan pada graf G disebut sebagai bilangan kromatik dan dinotasikan dengan $\chi(G)$. Sedangkan, banyaknya cara yang dapat digunakan untuk mewarnai titik pada graf G dengan t warna yang disediakan disebut sebagai polinomial kromatik dan dinotasikan dengan $P_G(t)$. Pada artikel ini, dengan metode pendeteksian pola dan deduktif aksiomatik dirumuskan polinomial kromatik dari graf tripartit lengkap, yang dinotasikan dengan $K_{(l,m,n)}$ dengan $l, m \in \{1,2\}$ dan $l \leq m \leq n$.

INFORMASI ARTIKEL

Sejarah Artikel:
Diterima 23 Februari 2023
Direvisi 20 Maret 2023
Disetujui 5 April 2023
Tersedia online 1 Mei 2023
Dipublikasikan 1 Juni 2023

Kata Kunci:
Bilangan Kromatik,
Graf Tripartit Lengkap,
Pewarnaan Titik,
Polinomial Kromatik.

A B S T R A C T

Let $G = (V, E)$ be a connected graph and c be a proper vertex coloring using t colors. Vertex coloring on the graph G is a function $c: V(G) \rightarrow \{1,2, \dots, t\}$, such that $c(u) \neq c(v)$ if u and v are two vertices that adjacent to each other. If a graph can be colored with t colors, then the smallest number used on the graph G is referred as a chromatic number, denoted by $\chi(G)$. While, the number of distinct ways to color the vertices of G with t colors is called as chromatic polynomial, denoted by $P_G(t)$. In this paper, through axiomatic deductive and pattern detection methods, we propose the chromatic polynomials of complete tripartite graph, denoted by$K_{(l,m,n)}$ for $l, m \in \{1,2\}$ and $l \leq m \leq n$.

Keywords:
Chromatic Number,
Chromatic Polynomial,
Complete Tripartite Graph,
Vertex Coloring.

1. PENDAHULUAN

Polinomial kromatik pertama kali diperkenalkan oleh Birkhof pada tahun 1912. Kemudian tahun 1946 Birkhof dan Lewis mendapatkan polinomial kromatik dari graf planar dan membuat dugaan kuat mengenai Teorema Empat Warna (TEW), yaitu setiap graf planar membutuhkan maksimal 4-warna (Birkhoff & Lewis, 1946). Polinomial kromatik adalah banyaknya cara untuk mewarnai titik-titik pada graf G dengan t warna. Polinomial kromatik dinotasikan dengan $P_G(t)$. Minimal warna yang diperlukan untuk mewarnai graf G adalah sejumlah bilangan kromatiknya. Jika banyaknya warna yang dipakai untuk mewarnai graf G kurang dari bilangan kromatiknya, maka $P_G(t) = 0$. Bilangan kromatik adalah banyak warna minimum yang digunakan untuk mewarnai titik-titik pada graf G dengan syarat bahwa titik-titik yang bertetangga tidak boleh memiliki warna yang sama. Bilangan kromatik suatu graf G dinotasikan dengan $\chi(G)$. Graf G dikatakan memiliki bilangan kromatik t jika G dapat diwarnai dengan t warna dan tidak diwarnai dengan $t-1$ warna. Secara matematis, pewarnaan titik pada graf G adalah fungsi $c : V(G) \to \{1,2,3,\dots,t\}$, sedemikian sehingga $c(u) \neq c(v)$ jika u dan v merupakan dua titik yang bertetangga (Afriantini & Fran, 2019; Malaguti, & Toth, 2010; Simanjuntak, 2021).

Kajian mengenai polinomial kromatik telah dibahas oleh beberapa peneliti sebelumnya. Sebuah graf dengan n buah titik dan 0 buah sisi, yang dinotasikan dengan N_n, memiliki polinomial kromatik $P_{N_n}(t) = t^n$. Sedangkan graf lengkap dengan n buah titik, yang dinotasikan dengan K_n, memiliki polinomial kromatik $P_{K_n}(t) = t(t-1)(t-2)\dots(t-n+1)$. Read (1968) membuktikan bahwa polinomial kromatik dari sembarang graf pohon dengan n buah titik, yaitu T_n, adalah $P_{T_n}(t) = t(t-1)^{n-1}$. Al-Gounmeein (2012) membuktikan bahwa polinomial kromatik dari graf *cycle* dengan n titik, C_n, adalah $P_{C_n}(t) = (t-1)^n + (-1)^n(t-1)$. Bohn (2014) menentukan rumus polinomial kromatik dari komplemen graf bipartit. Maulana, *et al* (2018) membuktikan bahwa polinomial kromatik dari graf kipas dengan n buah titik, F_n, adalah $P_{F_n}(t) = t(t-1)(t-2)^{n-1}$. Sedangkan, Narendra (2022) merumuskan polinomial kromatik untuk graf bunga lengkap. Pada artikel ini, akan dibahas mengenai polinomial kromatik dari graf tripartit lengkap $K_{l,m,n}$ dengan $l, m \in \{1,2\}$ dan $l \leq m \leq n$.

2. METODE

Metode yang digunakan dalam penentuan polinomial kromatik pada graf tripartit lengkap $K_{l,m,n}$ dengan $l, m \in \{1,2\}$ dan $l \leq m \leq n$ adalah metode pendeteksian pola dan deduktif aksiomatik. Dalam hal ini, akan dicari polinomial kromatik dari graf tripartit lengkap $K_{l,m,n}$:

a. Dengan $l = 1, m = 1$, dan $n \geq 1$ yaitu graf tripartit lengkap $K_{1,1,1}$, $K_{1,1,2}$, dan $K_{1,1,3}$ sebagai acuan untuk mendapatkan pola poliomial kromatik dari graf tripartit lengkap $P_{K_{1,1,n}}(t)$.
b. Dengan $l = 1, m = 2$, dan $n \geq 2$ yaitu graf tripartit lengkap $K_{1,2,2}$, $K_{1,2,3}$, dan $K_{1,2,4}$ sebagai acuan untuk mendapatkan pola poliomial kromatik graf tripartit lengkap $P_{K_{1,2,n}}(t)$.
c. Dengan $l = 2, m = 2$, dan $n \geq 2$ yaitu graf tripartit lengkap $K_{2,2,2}$, $K_{2,2,3}$, dan $K_{2,2,4}$ sebagai acuan untuk mendapatkan pola poliomial kromatik graf tripartit lengkap $P_{K_{2,2,n}}(t)$.

Metode deduktif aksiomatik juga berperan dalam menyelesaikan penelitian ini. Metode deduktif aksiomatik merupakan metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada. Teorema yang terkait dengan bilangan kromatik dan polinomial kromatik adalah sebagai berikut:

Teorema 2.1 *Jika G adalah sebuah graf sederhana dengan derajat titik terbesar Δ maka G adalah $(\Delta + 1)$-pewarnaan.*

Teorema 2.2 *Jika G adalah graf sederhana terhubung yang bukan merupakan graf lengkap dan jika derajat terbesar dari G adalah $\Delta \geq 3$ maka G adalah Δ-pewarnaan* (Dikutip dari buku "Pengantar Teori Graf" dengan penulis Wilson, tahun 2010).

Teorema 2.3 *Jika G graf sederhana dengan derajat maksimum $\Delta(G)$, maka $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$* (Sanders & Zhao, 2000).

Teorema 2.4 *Jika diberikan sebuah graf G dengan order n, maka polinomial kromatik dari graf G adalah $P_G(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(G,i)(t)_i$ dengan $\alpha(G,i)$ banyak kemungkinan partisi $V(G)$ dalam i himpunan bagian* (Read, 1968).

Teorema 2.5 *Misalkan u dan v dua titik yang tidak bersinggungan dalam graf G. Misalkan G' adalah sebuah graf yang didapat dari graf G dengan menghubungkan sebuah garis antara titik u dan v, sedangkan G'' adalah sebuah graf yang didapatkan dengan menggabungkan titik u dan v menjadi sebuah titik, maka $P_G(t) = P_{G'}(t) + P_{G''}(t)$.*

Teorema 2.6 *G adalah graf sederhana, dengan $G - e$ dan $G\backslash e$ adalah graf yang diperoleh dari G dengan menghilangkan dan menggabungkan 2 titik yang bersinggungan dengan sisi e, maka $P_G(t) = P_{G-e}(t) - P_{G\backslash e}(t)$.*

Teorema 2.7 *Polinomial kromatik $P_G(t)$ dari graf G dengan n titik dan m sisi memenuhi kondisi berikut:*

a. *Order polinomial dari $P_G(t)$ adalah n.*
b. *Koefisien dari t^n pada $P_G(t)$ adalah 1.*
c. *Koefisien dari t^{n-1} pada $P_G(t)$ adalah $-m$.*
d. *Suku konstan dari $P_G(t)$ adalah 0.*
e. *Jika $m \neq 0$, maka jumlah koefisien pada $P_G(t)$ adalah 0.*

(Read, 1968)

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Polinomial kromatik dari suatu graf dapat diperoleh dari polinomial kromatik graf lengkap K_n, K_{n-1}, K_{n-2}, dan seterusnya dengan n adalah bilangan kromatiknya. Dalam hal ini berlaku, $P_G(t)$ adalah polinomial kromatik dari graf G dengan t warna jika dan hanya jika $P_{K_n}(t) > 0$. Pernyataan ini ekuivalen dengan $P_{K_n}(t) > 0$ jika dan hanya jika $\chi(G) \leq t$. Pada artikel ini, akan dibahas mengenai polinomial kromatik dari graf tripartit lengkap dengan mempartisi himpunan pewarnaan titiknya. Graf tripartit lengkap adalah graf k-partit lengkap dengan $k = 3$. Dalam hal ini, setiap titik pada sebuah partisi bertetangga dengan setiap titik pada dua partisi titik lainnya. Jika terdapat 3 partisi titik dengan banyak titik pada masing-masing partisi adalah l, m, dan n, maka graf tripartit lengkap dinotasikan dengan $K_{l,m,n}$.

3.1 Bilangan Kromatik

Bilangan kromatik dari suatu graf dapat diperoleh dengan mengidentifikasi pewarnaan titik pada graf sebagai batas atas dan dengan mengidentifikasi struktur grafnya sebagai batas bawah. Apabila suatu graf G mempunyai struktur graf lengkap K_n maka batas bawah untuk bilangan kromatiknya adalah $\chi(G) \geq n$. Bilangan kromatik dari graf tripartit lengkap $K_{l,m,n}$ ditunjukkan pada Lema 3.1.

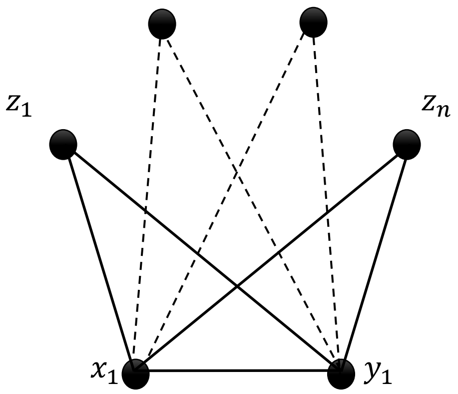
Lema 3.1 Bilangan kromatik dari graf tripartit lengkap $K_{l,m,n}$ adalah:

$$\chi(K_{l,m,n}) = 3.$$

3.2 Polinomial Kromatik

Polinomial kromatik dari suatu graf dapat dicari dengan mempartisi himpunan pewarnaan titik dari graf G. Dalam hal ini, setiap titik yang berwarna sama akan berada dalam satu himpunan bagian, sedangkan titik-titik yang berwarna berbeda tidak berada pada satu himpunan bagian. Selanjutnya, menghitung banyaknya partisi pewarnaan dari graf G dengan i warna. Dengan menggunakan Teorema 2.4, maka polinomial kromatik dari graf G adalah penjumlahan dari banyaknya partisi himpunan pewarnaan titik dikalikan dengan banyaknya cara untuk mewarnai graf G tepat i warna. Polinomial kromatik dari graf tripartit lengkap akan ditunjukkan pada Teorema 3.1, Teorema 3.2, dan Teorema 3.3 berikut ini.

3.2.1 Polinomial Kromatik Dari Graf Tripartit Lengkap $K_{1,1,n}$



Gambar 1. Graf Tripartit Lengkap $K_{1,1,n}$

Untuk mendapatkan pola polinomial kromatik dari graf tripartit lengkap $K_{1,1,n}$ dengan $n \geq 1$ (Gambar 1) adalah dengan mencari graf lengkap dengan n yang ditentukan. Dalam hal ini, akan digunakan graf tripartit lengkap $K_{1,1,1}$, $K_{1,1,2}$, dan $K_{1,1,3}$ sebagai bentuk khusus untuk mendapatkan pola polinomial kromatik dari graf tripartit lengkap $K_{1,1,n}$ secara umum. Pertama, untuk mendapatkan polinomial kromatik dari graf $K_{1,1,1}$ adalah sama dengan polinomial kromatik dari graf lengkap K_3 yaitu:

$$P_{K_{1,1,1}}(t) = P_{K_3}(t) = t(t-1)(t-2) \quad (1)$$

Kedua, untuk mendapatkan polinomial kromatik dari graf $K_{1,1,2}$ adalah dengan mencari semua kemungkinan pewarnaan yang terjadi pada setiap titik $V(K_{1,1,2})$. Selanjutnya, mempartisikan himpunan titik dari semua kemungkinan pewarnaan titik yang diperoleh. Kedua cara tersebut ditunjukkan pada Tabel 1.

Tabel 1. Bentuk partisi graf tripartit lengkap $K_{1,1,2}$

Jika dua titik memiliki warna sama	**Kemungkinan pewarnaan titik lainnya**	**Bentuk partisi himpunan pewarnaan**	**Banyak partisi**
$z_1 = z_2$	$x_1 \neq y_1$	$\{\{z_1, z_2\}, \{x_1\}, \{y_1\}\}$	3
Berbeda semua	$x_1 \neq y_1 \neq z_1 \neq z_2$	$\{\{x_1\}, \{y_1\}, \{z_1\}, \{z_2\}\}$	4

Pada Tabel 1 diperoleh banyak partisi dari kemungkinan pewarnaan graf $K_{1,1,2}$ adalah $\alpha(K_{1,1,2}, 3) = 1$ dan $\alpha(K_{1,1,2}, 4) = 1$. Berdasarkan Teorema 2.4, didapatkan polinomial kromatik dari graf $K_{1,1,2}$ adalah:

$$\begin{aligned} P_{K_{1,1,2}}(t) &= \sum_{i=3}^{4} \alpha(K_{1,1,2}, i)(t)_i \\ &= t_3 + t_4 \\ &= \big(t(t-1)(t-2)\big) + \big(t(t-1)(t-2)(t-3)\big) \\ &= t^4 - 5t^3 + 8t^2 - 4t \\ &= t(t-1)(t-2)^2 \end{aligned} \tag{2}$$

Ketiga, untuk mendapatkan polinomial kromatik dari graf $K_{1,1,3}$ adalah dengan menggunakan metode yang sama seperti sebelumnya. Sehingga didapatkan banyak partisi dari kemungkinan pewarnaan graf $K_{1,1,3}$ yaitu $\alpha(K_{1,1,3}, 3) = 1$, $\alpha(K_{1,1,3}, 4) = 3$, dan $\alpha(K_{1,1,3}, 5) = 1$. Berdasarkan Teorema 2.4, didapatkan polinomial kromatik dari graf $K_{1,1,3}$ adalah:

$$\begin{aligned} P_{K_{1,1,3}}(t) &= \sum_{i=3}^{5} \alpha\big(K_{1,1,3}, i\big)(t)_i \\ &= t_3 + 3t_4 + t_5 \\ &= \big(t(t-1)(t-2)\big) + 3\big(t(t-1)(t-2)(t-3)\big) \\ &\quad + \big(t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)\big) \\ &= t^5 - 7t^4 + 18t^3 - 20t^2 + 8t \\ &= t(t-1)(t-2)^3 \end{aligned} \tag{3}$$

Berdasarkan Persamaan (1), (2), dan (3) didapatkan pola dari polinomial kromatik graf $K_{1,1,n}$ yaitu $P_{K_{1,1,n}}(t) = t(t-1)(t-2)^n$.

Teorema 3.1

Polinomial kromatik dari graf $K_{1,1,n}$ adalah $P_{K_{1,1,n}}(t) = t(t-1)(t-2)^n$

Bukti:

Akan dibuktikan dengan induksi matematika bahwa polinomial kromatik dari graf tripartit lengkap $K_{1,1,n}$ adalah $P_{K_{1,1,n}}(t) = t(t-1)(t-2)^n$ untuk semua bilangan bulat positif n.

- Langkah awal

Akan ditunjukkan $P_{K_{1,1,\mathrm{n}}}(t)$ untuk $n = 1$ adalah graf tripartit lengkap $K_{1,1,1}$ dan polinomial kromatiknya sesuai dengan Persamaan (1) yaitu:

$$P_{K_{1,1,1}}(t) = t(t-1)(t-2)^1.$$

- Langkah induksi

Asumsikan untuk graf $K_{1,1,\mathrm{n}}$ dengan n bilangan bulat positif mempunyai polinomial kromatik $P_{K_{1,1,\mathrm{n}}}(t) = t(t-1)(t-2)^n$. Selanjutnya akan ditunjukkan untuk graf $K_{1,1,\mathrm{n}+1}$ mempunyai polinomial kromatik $P_{K_{1,1,\mathrm{n}+1}}(t) = t(t-1)(t-2)^{n+1}$.

Misalkan x_1, y_1, dan $z_1, \dots, z_n$ adalah titik-titik yang berada pada tiga partisi himpunan yang berbeda di graf $K_{1,1,n}$. Jika terdapat t warna untuk mewarnai graf $K_{1,1,\mathrm{n}}$, maka ada t cara untuk mewarnai titik x_1. Misalkan titik x_1 diberi warna t, maka ada $(t-1)$ cara untuk mewarnai titik y_1. Karena 2 buah titik yang bertetangga dengan titik $z_1, \dots, z_n$ sudah terwarnai, maka ada $(t-2)$ cara untuk mewarnai titik $z_1, \dots, z_n$ sebanyak n. Sehingga banyaknya susunan cara untuk mewarnai graf tripartit lengkap $K_{1,1,n}$ adalah $t(t-1)(t-2)^n$. Graf $K_{1,1,\mathrm{n}+1}$ adalah graf $K_{1,1,\mathrm{n}}$ dengan menambahkan satu buah titik pada partisi ketiga. Sehingga akan ada penambahan cara untuk mengatur pewarnaan titik tersebut sesuai dengan banyaknya $n+1$. Diketahui, terdapat $(t-2)$ cara untuk mewarnai titik z, maka polinomial kromatik dari graf $K_{1,1,\mathrm{n}+1}$ adalah:

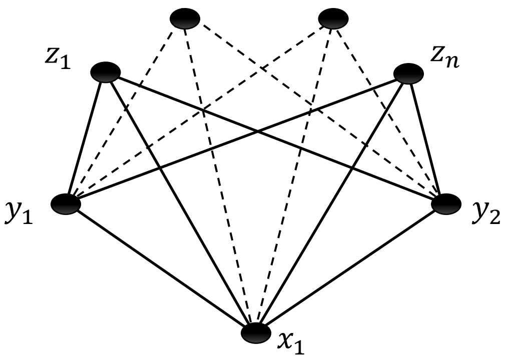
$$\begin{aligned} P_{K_{1,1,n+1}}(t) &= t(t-1)(t-2)^n(t-2) \\ &= t(t-1)(t-2)^{n+1}. \end{aligned}$$

Karena $P_{K_{1,1,1}}(t)$ bernilai benar dan implikasi $P_{K_{1,1,n}}(t) \rightarrow P_{K_{1,1,n+1}}(t)$ bernilai benar untuk semua bilangan bulat positif n, maka polinomial kromatik dari graf tripartit lengkap $K_{1,1,n}$ adalah:

$$P_{K_{1,1,n}}(t) = t(t-1)(t-2)^n \blacksquare$$

3.2.2 Polinomial Kromatik Dari Graf Tripartit Lengkap $K_{1,2,n}$

Ilustrasi graf tripartit lengkap $K_{1,2,n}$ terdapat pada Gambar 2. Simpul-simpul pada graf tersebut dapat dipartisi menjadi tiga bagian, yang terdiri dari sebuah titik x_1, dua buah titik y_1 dan y_2, dan n buah titik $z_1, z_2, \dots z_n$, dimana setiap titik pada suatu partisi bertetangga dengan titik-titik pada partisi lainnya.



Gambar 2. Graf Tripartit Lengkap $K_{1,2,n}$

Teorema 3.2

Polinomial kromatik dari graf $K_{1,2,n}$ adalah $P_{K_{1,2,n}}(t) = t(t-1)(t-2)[(t-3)^n + (t-2)^{n-1}]$

Bukti :

Akan ditunjukkan polinomial kromatik dari graf $K_{1,2,n}$ adalah $P_{K_{1,2,n}}(t) = t(t-1)(t-2)[(t-3)^n + (t-2)^{n-1}]$ menggunakan partisi himpunan pewarnaan titik dengan mengasumsikan $n \geq 2$. Jika $n = 2$, maka akan membentuk graf $K_{1,2,2}$. Selanjutnya mencari semua kemungkinan pewarnaan titik yang terjadi dan bentuk partisi pewarnaannya yang ditunjukkan pada Tabel 2.

Tabel 2 Bentuk Partisi Graf Tripartit Lengkap $K_{1,2,2}$

Jika dua titik memiliki warna sama	Kemungkinan pewarnaan titik lainnya	Bentuk partisi himpunan pewarnaan	Banyak partisi
$y_1 = y_2$	$z_1 = z_2, x_1$	$\{\{y_1, y_2\}, \{z_1, z_2\}, \{x_1\}\}$	3
$y_1 = y_2$	$x_1 \neq z_1 \neq z_2$	$\{\{y_1, y_2\}, \{x_1\}, \{z_1\}, \{z_2\}\}$	4
$z_1 = z_2$	$x_1 \neq y_1 \neq y_2$	$\{\{z_1, z_2\}, \{x_1\}, \{y_1\}, \{y_2\}\}$	4
Berbeda semua	$x_1 \neq y_1 \neq y_2 \neq z_1 \neq z_2$	$\{\{x_1\}, \{y_1\}, \{y_2\}, \{z_1\}, \{z_2\}\}$	5

Pada Tabel 2 diperoleh banyak partisi dari kemungkinan pewarnaan graf $K_{1,2,2}$ adalah $\alpha(K_{1,2,2}, 3) = 1$, $\alpha(K_{1,2,2}, 4) = 2$, dan $\alpha(K_{1,2,2}, 5) = 1$. Berdasarkan Teorema 2.4, didapatkan polinomial kromatik dari graf $K_{1,2,2}$ adalah

$$P_{K_{1,2,2}}(t) = \sum_{i=3}^{5} \alpha(K_{1,2,2}, i)(t)_i$$

$$= t_3 + 2t_4 + t_5$$

$$= \big(t(t-1)(t-2)\big) + 2\big(t(t-1)(t-2)(t-3)\big)$$

$$+\big(t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)\big)$$

$$= t^5 - 8t^4 + 24t^3 - 31t^2 + 14t$$

$$= t(t-1)(t-2)[(t-3)^2 + (t-2)^1] \tag{4}$$

Jika $n = 3$ didapatkan banyak partisi dari kemungkinan pewarnaan graf $K_{1,2,3}$ yaitu $\alpha(K_{1,2,3}, 3) = 1$, $\alpha(K_{1,2,3}, 4) = 4$, $\alpha(K_{1,2,3}, 5) = 4$, dan $\alpha(K_{1,2,3}, 6) = 1$. Berdasarkan Teorema 1.4, didapatkan polinomial kromatik dari graf $K_{1,2,3}$ adalah:

$$P_{K_{1,2,3}}(t) = \sum_{i=3}^{6} \alpha(K_{1,2,3}, i)(t)_i$$

$$= t_3 + 4t_4 + 4t_5 + t_6$$

$$= \big(t(t-1)(t-2)\big) + 4\big(t(t-1)(t-2)(t-3)\big) + 4\big(t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)\big) + (t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5))$$

$$= t^6 - 11t^5 + 49t^4 - 108t^3 + 115t^2 - 46t$$

$$= t(t-1)(t-2)[(t-3)^3 + (t-2)^2] \tag{5}$$

Jika $n = 4$ didapatkan banyak partisi dari kemungkinan pewarnaan graf $K_{1,2,4}$ yaitu $\alpha(K_{1,2,4}, 3) = 1$, $\alpha(K_{1,2,4}, 4) = 8$, $\alpha(K_{1,2,4}, 5) = 13$, $\alpha(K_{1,2,4}, 6) = 7$, dan $\alpha(K_{1,2,4}, 7) = 1$. Berdasarkan Teorema 2.4, didapatkan polinomial kromatik dari graf $K_{1,2,4}$ adalah:

$$P_{K_{1,2,4}}(t) = \sum_{i=3}^{7} \alpha(K_{1,2,4}, i)(t)_i$$

$$= t_3 + 8t_4 + 13t_5 + 7t_6 + t_7$$

$$= \big(t(t-1)(t-2)\big) + 8\big(t(t-1)(t-2)(t-3)\big) + 13\big(t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)\big) + 7\big(t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5)\big) + (t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5)(t-6))$$

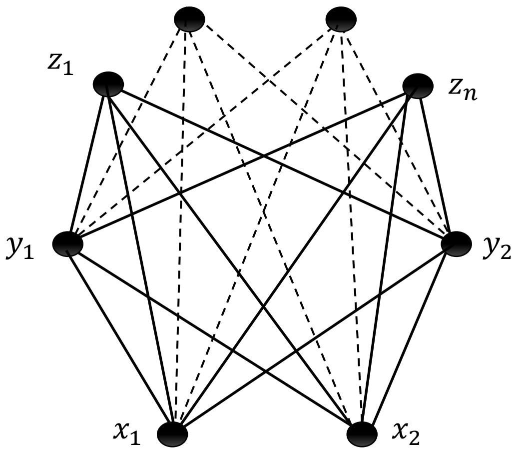
$$= t^7 - 14t^6 + 83t^5 - 262t^4 + 457t^3 - 411t^2 + 146t$$

$$= t(t-1)(t-2)[(t-3)^3 + (t-2)^2] \tag{6}$$

Berdasarkan Persamaan (4), (5), dan (6) terbukti bahwa pola dari polinomial kromatik graf $K_{1,2,n}$ adalah $P_{K_{1,2,n}}(t) = t(t-1)(t-2)[(t-3)^n + (t-2)^{n-1}]$ ■.

3.2.3 Polinomial Kromatik Dari Graf Tripartit Lengkap $K_{2,2,n}$

Ilustrasi graf tripartit lengkap $K_{2,2,n}$ terdapat pada Gambar 3. Pada graf tersebut, terdapat dua buah titik pada partisi pertama, dua buah titik pada partisi kedua, dan *n* buah titik pada partisi ketiga. Setiap titik pada sebuah partisi bertetangga dengan setiap titik pada partisi lainnya.



Gambar 3. Graf Tripartit Lengkap $K_{2,2,n}$

Teorema 3.3

Polinomial kromatik dari graf $K_{2,2,n}$ adalah $P_{K_{2,2,n}}(t) = t(t-1)(t-2)[(t-3)^2(t-4)^{n-1} + (t-2)^n - (n^2-3n+2)(t-3)^{n-2}]$

Bukti:

Akan ditunjukkan polinomial kromatik dari graf $K_{2,2,n}$ adalah $P_{K_{2,2,n}}(t) = t(t-1)(t-2)[(t-3)^2(t-4)^{n-1} + (t-2)^n - (n^2-3n+2)(t-3)^{n-2}]$ menggunakan partisi himpunan pewarnaan titik dengan mengasumsikan $n \geq 2$. Jika $n = 2$, maka akan membentuk graf $K_{2,2,2}$. Selanjutnya mencari semua kemungkinan pewarnaan titik yang terjadi dan bentuk partisi pewarnaannya yang ditunjukkan pada Tabel 3.

Tabel 3. Bentuk Partisi Graf Tripartit Lengkap $K_{2,2,2}$

Jika dua titik memiliki warna sama	Kemungkinan pewarnaan titik lainnya	Bentuk partisi himpunan pewarnaan	Banyak partisi
$x_1 = x_2$	$y_1 = y_2, z_1 = z_2$	$\{\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\}, \{z_1, z_2\}\}$	3
$x_1 = x_2$	$y_1 = y_2, z_1 \neq z_2$	$\{\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\}, \{z_1\}, \{z_2\}\}$	4
$x_1 = x_2$	$z_1 = z_2, y_1 \neq y_2$	$\{\{x_1, x_2\}, \{z_1, z_2\}, \{y_1\}, \{y_2\}\}$	4
$y_1 = y_2$	$z_1 = z_2, x_1 \neq x_2$	$\{\{y_1, y_2\}, \{z_1, z_2\}, \{x_1\}, \{x_2\}\}$	4
$x_1 = x_2$	$y_1 \neq y_2 \neq z_1 \neq z_2$	$\{\{x_1, x_2\}, \{y_1\}, \{y_2\}, \{z_1\}, \{z_2\}\}$	5
$y_1 = y_2$	$x_1 \neq x_2 \neq z_1 \neq z_2$	$\{\{y_1, y_2\}, \{x_1\}, \{x_2\}, \{z_1\}, \{z_2\}\}$	5
$z_1 = z_2$	$x_1 \neq x_2 \neq y_1 \neq y_2$	$\{\{z_1, z_2\}, \{x_1\}, \{x_2\}, \{y_1\}, \{y_2\}\}$	5
Berbeda semua	$x_1 \neq x_2 \neq y_1 \neq y_2 \neq z_1 \neq z_2$	$\{\{x_1\}, \{x_2\}, \{y_1\}, \{y_2\}, \{z_1\}, \{z_2\}\}$	6

Pada Tabel 3 diperoleh banyak partisi dari kemungkinan pewarnaan graf $K_{2,2,2}$ adalah $\left(K_{2,2,2},3\right)=1$, $\alpha\left(K_{2,2,2},4\right)=3$, $\alpha\left(K_{2,2,2},5\right)=3$, dan $\alpha\left(K_{2,2,2},6\right)=1$. Berdasarkan Teorema 2.4, didapatkan polinomial kromatik dari graf $K_{2,2,2}$ adalah:

$$
\begin{aligned}
P_{K_{2,2,2}}(t) &= \sum_{i=3}^{6} \alpha\left(K_{2,2,2},i\right)(t)_i \\
&= t_3+3t_4+3t_5+t_6 \\
&= \left(t(t-1)(t-2)\right)+3\left(t(t-1)(t-2)(t-3)\right) \\
&\quad +3\left(t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)\right) \\
&\quad +(t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5)) \\
&= t^6-12t^5+58t^4-137t^3+154t^2-64t \\
&= t(t-1)(t-2)[(t-3)^2(t-4)^3+(t-2)^2] \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Jika $n=3$ didapatkan banyak partisi dari kemungkinan pewarnaan graf $K_{2,2,3}$ yaitu $\alpha\left(K_{2,2,3},3\right)=1$, $\alpha\left(K_{2,2,3},4\right)=5$, $\alpha\left(K_{2,2,3},5\right)=8$, $\alpha\left(K_{2,2,3},6\right)=5$, dan $\alpha\left(K_{2,2,3},7\right)=1$. Berdasarkan Teorema 2.4, didapatkan polinomial kromatik dari graf $K_{2,2,3}$ adalah:

$$
\begin{aligned}
P_{K_{2,2,3}}(t) &= \sum_{i=3}^{7} \alpha\left(K_{2,2,3},i\right)(t)_i \\
&= t_3+5t_4+8t_5+5t_6+t_7 \\
&= \left(t(t-1)(t-2)\right)+5\left(t(t-1)(t-2)(t-3)\right) \\
&\quad +8(t(t-1)(t-2)(t-3)t) \\
&\quad +5(t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5)) \\
&\quad +(t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5)(t-6)) \\
&= t^7-16^6+108t^5-385t^4+750t^3-742t^2+284t \\
&= t(t-1)(t-2)[(t-3)^2(t-4)^2+(t-2)^3-2(t-3)^1] \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Jika $n=4$ didapatkan banyak partisi dari kemungkinan pewarnaan graf $K_{2,2,4}$ yaitu $\alpha\left(K_{2,2,4},3\right)=1$, $\alpha\left(K_{2,2,4},4\right)=9$, $\alpha\left(K_{2,2,4},5\right)=21$, $\alpha\left(K_{2,2,4},6\right)=20$, $\alpha\left(K_{2,2,4},7\right)=8$, dan $\alpha\left(K_{2,2,4},9\right)=1$. Berdasarkan Teorema 2.4, didapatkan polinomial kromatik dari graf $K_{2,2,4}$ adalah:

$$
\begin{aligned}
P_{K_{2,2,4}}(t) &= \sum_{i=3}^{8} \alpha\left(K_{2,2,4},i\right)(t)_i \\
&= t_3+9t_4+21t_5+20t_6+8t_7+t_8 \\
&= \left(t(t-1)(t-2)\right)+9\left(t(t-1)(t-2)(t-3)\right) \\
&\quad +21\left(t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)\right)
\end{aligned}
$$

$$+20(t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5))$$
$$+8(t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5)(t-6))$$
$$+(t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5)(t-6)(t-7))$$
$$= t^8 - 20t^7 + 174t^6 - 839t^5 + 2388t^4 - 3958t^3 + 3482t^2 - 1228t$$
$$= t(t-1)(t-2)[(t-3)^2(t-4)^3 + (t-2)^4 - 6(t-3)^2] \qquad (9)$$

Berdasarkan Persamaan (7), (8), dan (9) terbukti bahwa pola dari polinomial kromatik graf $K_{2,2,n}$ adalah $P_{K_{2,2,n}}(t) = t(t-1)(t-2)[(t-3)^2(t-4)^{n-1} + (t-2)^n - (n^2-3n+2)(t-3)^{n-2}]$ ■.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa polinomial kromatik dari graf tripartit lengkap $K_{l,m,n}$ dengan $l, m \in \{1,2\}$ dan $l \le m \le n$ adalah sebagai berikut:

a. Polinomial kromatik graf tripartit lengkap $K_{1,1,n}$ adalah $P_{K_{1,1,n}}(t) = t(t-1)(t-2)^n$.
b. Polinomial kromatik graf tripartit lengkap $K_{1,2,n}$ adalah $P_{K_{1,2,n}}(t) = t(t-1)(t-2)[(t-3)^n + (t-2)^{n-1}]$.
c. Polinomial kromatik graf tripartit lengkap $K_{2,2,n}$ adalah $P_{K_{2,2,n}}(t) = t(t-1)(t-2)[(t-3)^2(t-4)^{n-1} + (t-2)^n - (n^2-3n+2)(t-3)^{n-2}]$.

5. DAFTAR PUSTAKA

Afriantini, Helmi, & Fran, F. (2019). Pewarnaan simpul, sisi, wilayah pada graf dan penerapannya. *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, *8*(4), 773-782.

Al-Gounmeein, R. S. (2012). On the chromatic polynomial of a cycle graph. *International Journal of Applied Mathematics*, *25*(6), 825-832.

Birkhoff, G. D. & Lewis, D. C. (1946). Chromatic polynomials. *Transactions of the American Mathematical Society*, *60*(3), 355-451.

Bohn, A. (2014). Chromatic polynomials of complements of bipartite graphs. *Graphs and Combinatorics*, *30*, 287-301.

Malaguti, E., & Toth, P. (2010). A survey on vertex coloring problems. *International Transactions in Operational Research*, *17*(1), 1-34.

Maulana, N. R., Wijaya, K., & Santoso, K. A. (2018). On chromatic polynomial of a fan graph. *Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika*, *18*(2), 55-60.

Narendra, R. (2022). Polinomial kromatik graf bunga. *Unisda Journal of Mathematics and Computer Science*, *8*(2), 55-58.

Read, R. C. (1968). An introduction to chromatic polynomials. *Journal of Combinatorial Theory*, *4*(1), 52-71.

Sanders, D. P., & Zhao, Y. (2000). On the entire coloring conjecture. *Canadian Mathematical Bulletin*, *43*(1), 108-114.

Simanjuntak, S. (2021). Bilangan kromatik hasil operasi korona graf lingkaran dan graf kubik. *Karismatika: Kumpulan Artikel Ilmiah, Informatika, Statistik, Matematika dan Aplikasi*, *7*(2), 25-31.