Permasalahan Lukisan Geometri sebagai Suatu Lapangan

Farhani[1]*, Saiful Amri[1], dan Zahnur[1]

[1]Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Syah Kuala Darussalam Banda Aceh
*Email: farhani.math@gmail.com

ABSTRAK. Tulisan ini membahas dua masalah klasik yang sangat terkenal di dalam lukisan geometri dimana alat yang diperbolehkan hanya jangka dan mistar tanpa skala. Kedua masalah tersebut adalah membagi tiga buah sudut dan menggandakan volume kubus, yang akan dibuktikan bahwa keduanya mustahil dapat dilukis. Pembuktian dilakukan dengan menerjemahkan permasalahan geometri menjadi permasalahan aljabar. Kemudian, digunakan konsep lapangan dan ruang vektor untuk membuktikan keterlukisan masalah lukisan tersebut

Kata Kunci: Membagi tiga sebuah sudut, Menggandakan volume kubus.

e-ISSN: 2528-4231
p-ISSN: 2776-480X

The problem of Painting Geometry as a Field

ABSTRACT. *The main subject of this paper is about the two famous classical problems in geometric construction with the allowed instruments which are only the compass and unmarked ruler. Such two problems are trisecting an angle and doubling the cube, which will be proved that both of them are impossible to be constructed. The proofs are done by translating the problems into the algebraic terms. Then, the problems are solved using some studied topics in algebra, especially vector space and field extension theory*.

Keywords: *Trisecting an angle, Doubling the cube.*

1. PENDAHULUAN

Lukisan geometri adalah suatu topik yang dipelajari sejak lama, bahkan topik tersebut sudah dikenal sejak sebelum masehi. Ada berbagai jenis lukisan geometri, perbedaan jenisnya terletak pada alat yang digunakan. Jenis yang cukup popular adalah lukisan geometri yang hanya menggunakan jangka dan mistar tanpa skala. Dalam tulisan ini, selalu diasumsikan bahwa alat yang digunakan dalam lukisan geometri hanya berupa jangka dan mistar tanpa skala.

Melukis sudut dengan cara membagi dari sudut yang sudah diketahui telah menjadi topik yang sangat disukai. Dengan prinsip kekongruenan dua buah segitiga, dapat dibentuk sebuah sudut yang ukurannya setengah dari sudut yang diketahui. Dengan melakukan iterasi pada prinsip tersebut, dapat pula dibentuk sudut berukuran seperempat, atau seperdelapan, dan seterusnya dari sudut yang diberikan. Namun, belum ada metode untuk melukis sebuah sudut yang berukuran sepertiga dari sudut yang diberikan.

Masalah pembagian sudut ini merupakan salah satu masalah kuno yang cukup terkenal [1], yaitu: (P1) Diberikan sudut α, dapatkah dilukis sudut $\frac{1}{3}\alpha$?. Ada beberapa kasus dimana (P1) dapat diselesaikan, misalnya untuk $\alpha = 90°$. Dalam hal ini, konteks masalah (P1) yang dimaksud adalah secara umum.

Terdapat beberapa penelitian terdahulu yang telah membuktikan bahwa masalah (P1) tidak mungkin dapat dilakukan. Kalanov [2] membuktikan bahwa masalah membagi tiga sebuah sudut hanya dengan jangka dan penggaris lurus tidak mungkin dilakukan, dengan melakukan analisa dalam kerangka teori kesamaan segitiga dan kesamaan lingkaran konsentris, serta analisis logis. Lutzen [3] menganalisa pembuktikan ketidakmungkinan masalah (P2) berdasarkan teorema yang diusulkan oleh Monctula dan Condorcet. Selain itu, Sohrab [4] menunjukkan secara aljabar, bahwa (P1) tidak mungkin dapat dilakukan. Wantzel dalam Martin [5] membuktikan suatu dalil tentang lapangan yang sekaligus menjawab pertanyan (P1). Wantzel membuktikan bahwa sudut $20°$ tidak dapat dilukis dengan memanfaatkan dalil tersebut, sehingga sudut $60°$ tidak dapat dibagi tiga.

Masalah kuno lain yang terkenal adalah menggandakan kubus, yaitu (P2) diberikan suatu kubus, dapatkah dilukis kubus baru yang memiliki volume dua kali kubus semula? Wantzel dalam Martin [5] membuktikan pula bahwa $\sqrt[3]{2}$ tidak dapat dilukis dari kubus satuan dengan memanfaatkan dalil yang berkaitan dengan lapangan. Porter [6] menyajikan sebuah konstruksi tentative mengenai (P2) dengan mengamati aturan geometri Euclidean dan secara bersamaan menampilkan hubungan struktural dengan kemustahilan Euclidean lain. Wilis [7] menyajikan sudut pandang berbeda, bahwa dengan bantuan grafik dan jangka, serta cara kerja mundur, dapat dibuat kubus yang volumenya dua kali dari kubus semula.

e-ISSN: 2528-4231
p-ISSN: 2776-480X

Sangat menarik membahas bagaimana dua buah pertanyan besar dalam geometri yang tersimpan beberapa abad lamanya justru dapat dijawab dengan aljabar. Pada makalah ini, dibuktikan dengan detail bahwa pertanyaan (P1) dan (P2) keduanya memiliki jawaban negatif dengan menggunakan cara Wantzel.

2. METODOLOGI

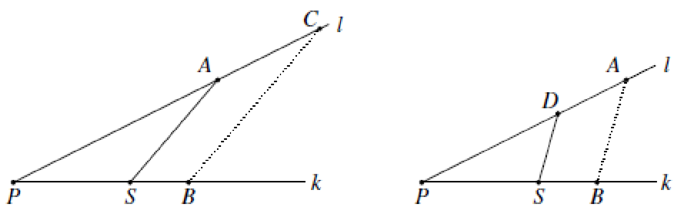
Pertanyaan (P1) dan (P2) akan dijawab secara aljabar dengan pendekatan lapangan yang tertuang dalam dalil. Untuk memahami dalil tersebut, diperlukan definisi-definisi dan dalil-dalil penunjang yang disajikan pada sub bab ini.

2.1. Lukisan Geometri

Dalam melukis garis, satuan yang digunakan adalah sembarang bilangan riil positif namun harus ditetapkan terlebih dahulu, dalam tulisan ini digunakan satuan 1 tanpa mengindahkan satuan panjangnya. Tentu saja diasumsikan garis dengan panjang 1 dapat dilukis.

Definisi 1. Bilangan riil $a \neq 0$ dikatakan dapat dilukis bila garis dengan panjang $|a|$ dapat dilukis. Himpunan bilangan yang dapat dilukis dinotasikan dengan L dan sebagai tambahan diasumsikan $0 \in L$ [8].

Dalil 1. Misal $a, b \in L$. Maka $a + b, ab \in \mathbb{L}$; jika $b \neq 0$, maka $a/b \in \mathbb{L}$ [8].
Bukti. Menunjukkan $a + b \in \mathbb{L}$ adalah trivial. Untuk menunjukkan ab dan a/b di $\mathbb{L}$, tidak masalah dengan mengasumsikan $a, b \in R^+$. Dibuat sembarang garis l dan k yang tidak sejajar dan berpotongan pada titik P. Dibuat pula titik $A \in l$ dan $B, S \in k$ sehingga $a = \overline{PA}, b = \overline{PB}, \overline{PS} = 1$. Tidak sulit melukis titik $C \in l$ sehingga $SA \parallel BC$.Karena $\triangle PSA \sim \triangle PBC$ maka $\overline{PB} : \overline{PC} = \overline{PS} : \overline{PA}$, jadi $ab = PA \times PB = PC \times PS = PC$ terlukiskan.



Gambar 1. Melukis garis ab dan garis a/b.

Untuk membuktikan $a/b \in \mathbb{L}$, misal P, A, B, S, k, l seperti sebelumnya. Lukis $D \in l$ sehingga $SD \parallel BA$. Karena $\triangle PSD \sim \triangle PBA$ maka $a/b = \overline{PA} : \overline{PB} = \overline{PD} : \overline{PS} = \overline{PD}$, jadi $a/b \in \mathbb{L}$. Ilustrasi terdapat pada Gambar 1.

2.2. Grup dan Ring Gallian

Misalkan S himpunan tak-hampa. Sembarang pemetaan dari $S \times S$ ke S disebut **operasi biner**. Himpunan S beserta operasi biner $*$ yang didefinisikan pada S kadang ditulis dengan $(S, *)$. Unsur $(a, b) \in S \times S$ yang dibawa oleh $*$ ke suatu unsur di S ditulis dengan $a * b$, kadang ditulis pula dengan ab atau $a + b$. Operasi biner $*$ disebut **asosiatif** bila $a(bc) = (ab)c$ dan disebut **komutatif** bila $ab = ba$ untuk setiap $a, b, c \in S$. Pasangan $(S,*)$ disebut **semigrup** bila $*$ asosiatif. Bila S memuat unsur e sehingga $es = s = se$ untuk setiap $s \in S$, maka unsur e ini tunggal dan disebut **identitas** [9].

Misalkan S semigrup yang mempunyai identitas e. Diberikan $a \in S$, unsur $b \in S$ disebut **invers** dari a bila $ab = e = ba$; jika b ada, maka ia tunggal. Semigrup yang mempunyai identitas dan setiap unsurnya memiliki invers disebut **grup**. Sebuah grup disebut **komutatif** atau **abelian** bila operasi binernya komutatif.

Misal $G = (G,*)$ grup. Grup G dikatakan **siklik** bila ada $a \in G$ sehingga $G = \langle a \rangle \overset{def}{=} \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$. **Order** dari G adalah kardinalitas dari G, sedangkan order $a \in G$ adalah bilangan asli (jika ada) terkecil n sehingga $a^n = e$. Himpunan bagian H dari G disebut **subgrup** dari G bila $(H,*)$ membentuk grup dan hal ini disombolkan sebagai $H \leq G$.

Himpunan R beserta dua buah operasi biner penjumlahan $+ : (x, y) \mapsto x + y$ dan perkalian $\cdot : (x, y) \mapsto xy$ disebut **ring**, ditulis dengan $R = (R, +, \cdot)$, bila [9]:

1. $(R, +)$ grup abelian,
2. $(R, \cdot)$ semigrup,
3. $(a + b)c = ac + bc$ dan $a(b + c) = ab + ac$ untuk setiap $a, b, c \in R$.

Ring R dikatakan **komutatif** bila perkaliannya komutatif. Di dalam ring, adanya dua operasi biner membuat istilah identitas dan invers menjadi ambigu, sehingga identitas dan invers dengan operasi berbeda disebut dengan nama berbeda pula. Identitas terhadap penjumlahan ditulis dengan 0 dan disebut dengan **nol**, sedangkan identitas terhadap perkalian (bila ada) ditulis dengan 1 disebut sebagai **satu**. Invers dari unsur a terhadap penjumlahan ditulis dengan $-a$ dan disebut **lawan** a, sedangkan invers dari unsur a terhadap perkalian (bila ada) ditulis dengan a^{-1} dan disebut **invers** a. Unsur yang mempunyai invers di R disebut juga dengan **unit**. Himpunan semua unit dari R ditulis dengan R^* dan himpunan $R \backslash \{0\}$ ditulis dengan $R^\times$. Unsur $a \in R^\times$ disebut **pembagi nol** bila $ab = 0$ untuk suatu $b \in R^\times$.

Ring komutatif R yang memuat 1 disebut **domain** bila setiap unsur tak-nolnya bukan pembagi nol. Ring komutatif R disebut **lapangan** bila $R^* = R^\times$.

Misal D domain. Unsur $a \in D^\times \backslash D^*$ disebut **tak tereduksi** bila $a = bc$ berakibat b atau c di D^*. Jika a tidak tak tereduksi, a disebut **tereduksi**. Misal $R = (R, +, \cdot)$ ring. Himpunan bagian S dari R disebut **subring** bila $(S, +, \cdot)$ membentuk ring, disimbolkan sebagai $S \leq R$. Istilah **subdomain** dan **sub-lapangan** didefinisikan secara serupa.

Dalil 2. Misal R ring komutatif dan misal

$$R[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n : \ a_i \in R, n \in \mathbb{N}\}.$$

Diberikan unsur

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m \text{ dan } g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$$

di R[x], definisikan penjumlahan

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots (a_s + b_s)x^s$$

dimana s adalah nilai maksimum dari m dan n, $a_s = 0$ jika $s > m$ dan $b^s = 0$ jika $s > n$; dan perkalian

$$f(x)g(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_{m+n}x^{m+n}$$

dimana $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i}$ untuk $k = 0, 1, \ldots, m + n$. Maka $R[x]$ membentuk ring dengan penjumlahan dan perkalian di atas. Ring ini disebut **ring polinom** atas R. Lebih lanjut, jika R lapangan maka $R[x]$ domain.

2.3. Ruang Vektor

Berdasarkan Lang [10], misalkan $V = (V, +)$ grup Abelian dan F lapangan. V disebut ruang vektor atas F (ditulis dengan ${}_FV$) bila ada aksi $\circ : (c, x) \in F \times V \mapsto cx \in V$ sehingga untuk setiap $a, b \in F$ dan $x, y \in V$ berlaku 4 hal berikut:

$$a(x + y) = ax + ay,$$
$$(a + b)x = ax + bx,$$
$$a(bx) = (ab)x,$$
$$1x = x.$$

Unsur dari V disebut vektor dan unsur F disebut skalar. Misal ${}_FV$ ruang vektor. Himpunan bagian U dari V disebut subruang dari V bila ${}_FU$ berupa ruang vektor, dinotasikan dengan $U \leq V$.

Misalkan ${}_FV$ ruang vektor dan $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$. Vektor $x \in V$ disebut **kombinasi linier** dari vektor-vektor di S bila $x = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ untuk suatu skalar $a_1, \ldots, a_n$. Himpunan semua kombinasi linier dari S ditulis dengan $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ atau $\langle S \rangle$ dan ia membentuk subruang (disebut sebagai subruang yang dibangun oleh S) dari V dan subruang ini adalah subruang terkecil yang memuat S. Bila $\langle S \rangle = V$, ruang vektor V disebut **dibangun** oleh vektor-vektor di S.

Misal ${}_F V$ ruang vektor. Vektor-vektor $x_1, \dots, x_n$ disebut **bergantung linier** bila ada skalar $c_1, \dots, c_n$ yang tidak semuanya nol sehingga $c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = 0$. Vektor-vektor $x_1, \dots, x_n$ disebut **bebas linier** bila mereka tidak bergantung linier. Misal ${}_F V$ ruang vektor. Himpunan bagian B dari V disebut **basis** bagi V bila vektor-vektor di B bebas linier dan $\langle B \rangle = V$. Sebuah sifat yang sangat dikenal tentang ruang vektor adalah: jika B_1 dan B_2 merupakan basis bagi V maka $|B_1| = |B_2|$. Kardinalitas $|B|$ disebut sebagai **dimensi** dari V dan ditulis dengan $\dim_F(V)$.

2.4 Perluasan Lapangan

Misal F lapangan. Lapangan K disebut **perluasan** dari F bila $F \leq K$. Lapangan K bisa dipandang sebagai ruang vektor atas F (dengan perkalian skalar berupa perkalian pada K) dan dalam hal ini $\dim_F(K)$ ditulis dengan $[K\colon F]$ dan disebut sebagai **derajat** dari K terhadap F [8].

Dalil 3. Jika $L \supset K \supset F$ barisan dari sublapangan dengan $[L\colon K]$ dan $[K\colon F]$ berhingga maka $[L\colon F] = [L\colon K][K\colon F]$.

Definisi 2. Misal F lapangan dan K perluasan dari F. Unsur $a \in K$ dikatakan **aljabar** terhadap F bila ada $p(x) \in F[x]^\times$ sehingga $p(a) = 0$; bila sebaliknya, a disebut **transenden** (terhadap F).

Jika a aljabar terhadap F maka ada polinom berderajat terkecil $p(x)$ di $F[x]^\times$ sehingga $p(a) = 0$; polinom ini disebut polinom **minimal** untuk a terhadap F. Polinom minimal harus tak tereduksi seperti yang ditegaskan oleh dalil berikut.

Dalil 4. Misal K perluasan dari F. Jika $a \in K$ aljabar terhadap F maka polinom minimalnya tak tereduksi.

Bukti. Jika polinom minimal $p(x)$ tereduksi maka $p(x) = g(x)h(x)$ untuk suatu $g, h \in F[x]$ yang tak-konstan. Karena K tak-punya pembagi nol dan $0 = p(a) = g(a)h(a)$ maka $g(a) = 0$ atau $h(a) = 0$; sebutlah $g(a) = 0$. Sehingga menurut pemilihan p tentu $deg\, p \leq deg\, g$, padahal $deg\, p > deg\, g$.

e-ISSN: 2528-4231
p-ISSN: 2776-480X

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan ditunjukkan bahwa jawaban dari pertanyaan (P1) dan (P2) adalah tidak mungkin. Dalil utama dalam tulisan ini adalah Dalil 8. Semua jawaban untuk pertanyaan (P1), (P2) dijawab dengan memanfaatkan Dalil 8.

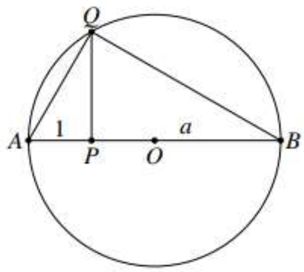
Dalil 5. Misal K perluasan dari F dan $a \in K$ aljabar terhadap F dengan $p(x)$ adalah polinom minimalnya. Maka $F[a] \overset{def}{=} \{f(a): f(x) \in F[x]\}$ membentuk lapangan yang merupakan perluasan dari F dan $[F[a]: F] = \deg p$

Dalil 5 mengatakan bahwa $\mathbb{L}$ berupa sublapangan dari $\mathbb{R}$ yang memuat $\mathbb{Q}$. Lapangan $\mathbb{L}$ lebih luas dari $\mathbb{Q}$ sebab ada bilangan irrasional yang berada di $\mathbb{L}$, misalnya $\sqrt{2}$.

Dalil 6. Jika $a \in L$ maka $\sqrt{a} \in L$.

Bukti. Buat titik A, P, B pada satu garis dimana $AP = 1$ dan $PB = a$. Lukis titik tengah O dari AB dan $Q \in \odot\left(O; \frac{1+a}{2}\right)$ sehingga $QP \perp AB$. Karena $\angle AQB = 90°$ maka

$$\triangle AQB \sim \triangle APQ \sim \triangle QPB$$



Gambar 2. Melukis $\sqrt{a}$

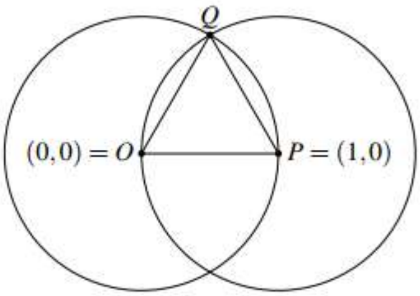
dan dari $\triangle APQ \sim \triangle QPB$ didapat $\overline{PQ} \div \overline{AP} = \overline{PB} \div \overline{QP}$, jadi $\sqrt{a} = \sqrt{\overline{AP} \times \overline{PB}} = \sqrt{\overline{PQ} \times \overline{QP}} = \overline{PQ}$ terlukiskan. Ilustrasi terdapat pada Gambar 2.

Misalkan F sublapangan dari L. Titik $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ dikatakan pada bidang F bila $x, y \in F$. Suatu garis dikatakan **pada bidang** F bila ada dua titik $(a, b) \neq (c, d)$ pada bidang F yang terletak pada garis itu. Suatu lingkaran dikatakan pada bidang F bila jari-jarinya di F dan titik pusatnya pada bidang F. Garis dan lingkaran pada bidang F berbentuk

$$y = ax + b, \qquad x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$$

dimana $a, b, d, e, f \in F \subset \mathbb{R}$. Dalam lukisan geometri yang menggunakan mistar dan jangka, saat menggunakan mistar tak lain adalah membuat penggal garis yang melalui dua titik pada bidang F. Menggunakan jangka tak lain membuat penggal lingkaran dengan pusatnya berada pada bidang F dan jari-jarinya di F.

Suatu masalah lukisan dapat dipecahkan bila dapat dilukis titik-titik baru sehingga masalah tersebut terselesaikan. Sebagai contoh untuk melukis sudut 60°, buat garis yang melalui $O = (0, 0)$ dan $P = (1, 0)$ pada bidang $\mathbb{Q}$. Lalu buat $\odot\, c_1 = (O; 1)$ dan $\odot\, c_2 = (P; 1)$. Oleh karena itu, diperoleh titik baru $Q \in c_1 \cap c_2$. Karena $\triangle\, QOP$ sama sisi, maka $\angle QOP = 60°$ terlukiskan. Ilustrasi terdapat pada Gambar 3.



Gambar 3. Melukis sudut 60°.

Secara umum, diberikan sembarang masalah lukisan, berarti diberikan sejumlah titik pada bidang F, dimana F suatu sublapangan dari L. Selanjutnya cari titik-titik baru untuk menyelesaikan masalah tersebut. Titik-titik baru itu didapatkan melalui tiga kemungkinan berikut:

(i). perpotongan antara dua garis pada bidang F,

(ii). perpotongan antara garis dan lingkaran pada bidang F, atau

(iii). perpotongan antara dua lingkaran pada bidang F.

Pada kasus (i), jika dua garis $y = ax + b$ dan $y = cx + d$ pada bidang F berpotongan maka $a \neq c$ dengan titik potong $P = (x_0, ax_0 + b)$ dimana $x_0 = \frac{d-b}{a-c}$. Titik P ini pada bidang F sebab F lapangan dan $a - c \neq 0$.

Pada kasus (ii), misal $y = ax + b$ dan $x_2 + y_2 + cx + dy + e = 0$ adalah garis dan lingkaran pada bidang F. Subtitiusi $y = ax + b$ ke persamaan lingkaran akan didapatkan sebuah persamaan kuadrat berbentuk $x^2 + sx + t = 0$ untuk suatu $s, t \in F$ yang memiliki akar

e-ISSN: 2528-4231
p-ISSN: 2776-480X

$$x' = \frac{-s \pm \sqrt{D}}{2}$$

dimana $D = s^2 - 4t$. Jika $D < 0$ maka garis dan lingkaran tidak berpotongan.

Misalkan $D \geq 0$. Maka garis dan lingkaran berpotongan di $P = (x', ax' + b)$. Jika $\sqrt{D} \in F$ maka $P \in F$; jika $\sqrt{D} \notin F$ maka $P \in F[\sqrt{D}]$ dan menurut Dalil 6 tentu $\sqrt{D} \in \mathbb{L}$. Jadi P selalu di $\mathbb{L}$ dan [F[√D] : F] = 1 atau = 2.

Kasus terakhir, untuk menentukan titik potong dua lingkaran

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \text{ dan } x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$$

pada bidang F, dengan mengurangkan kedua persamaan itu diperoleh

$$(a - d)x + (b - e)y + (c - f) = 0$$

yang berupa garis pada bidang F. Ini kembali lagi menjadi masalah menentukan titik potong antara lingkaran dan garis yang baru saja dibahas pada kasus (ii).

Ketiga kasus itu menyimpulkan satu hal, bahwa jika garis dan garis atau garis dan lingkaran atau lingkaran dan lingkaran pada bidang F berpotongan, maka titik potongnya berada pada bidang F atau bidang $F[\sqrt{a}]$ untuk suatu $a \in F$ dan $F[\sqrt{a}] \leq L$. Jika $\sqrt{a} \in F$ maka $F[\sqrt{a}] = F$, jadi $[F[\sqrt{a}]: F] = 1$. Jika $\sqrt{a} \notin F$ maka $p(x) = x^2 - a \in F[x]$ berupa polinom minimal untuk $\sqrt{a}$ terhadap F dan berdasarkan Dalil 5 diperoleh $[F[\sqrt{a}] : F] = 2$. Perluasan $F[\sqrt{a}]$ disebut juga perluasan **kuadratik** dari F.

Dalil 7. Jika $a \in \mathbb{L}$, maka $[Q[a]: Q] = 2^m$ untuk suatu $m \in \mathbb{N}$.

Bukti. Untuk melukis a, mulai dari bidang $F_0 = \mathbb{Q}$. Jika $a \notin F_0$, maka dilanjutkan ke bidang F_1 yang merupakan perluasan kuadratik dari F_0. Jika $a \notin F_1$, perlu dilanjutkan ke F_2, dan seterusnya hingga didapatkan $n \in Z^+$ sehingga $a \in F_n$ dan n ini dijamin ada sebab $a \in \mathbb{L}$. Jadi diperoleh barisan lapangan

$$\mathbb{Q} = F_0 \leq F_1 \leq \cdots \leq F_n \leq \mathbb{L} \leq \mathbb{R}$$

dimana $a \in F_n$ dan $[F_i: F_{i-1}] = 2$. Penggunaan Dalil 3 secara beruntun memberikan

$$[F_n: \mathbb{Q}] = [F_n: F_{n-1}] \ldots [F_2: F_1][F_1: F_0] = 2^n$$

dan karena $\mathbb{Q}(a) \leq F_n$, maka $[\mathbb{Q}(a): \mathbb{Q}] = 2^m$ untuk suatu $m \leq n$.

Dalil 8. Jika $a \in \mathbb{L}$ maka derajat dari polinom minimal untuk a terhadap $\mathbb{Q}$ adalah 2^m untuk suatu $m \in \mathbb{N}$. Dengan kata lain, jika bilangan riil a adalah akar dari sembarang polinom $p(x) \in Z[x]$ yang tak tereduksi di $Q[x]$ dan deg p bukan berupa pangkat dari 2 maka α tidak dapat dilukis.

Sedikit kendala dari Dalil 8 adalah bagaimana mengetahui suatu polinom f di $\mathbb{Z}[x]$ tak tereduksi di $\mathbb{Q}[x]$. Bila deg $f = 3$, dapat digunakan dalil 9 berikut.

Dalil 9. Misal $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Z}[x], a_n \neq 0$. Jika r/s adalah akar rasional dari $f(x) = 0$ dimana $gcd(r,s) = 1$, maka $r|a_0$ dan $s|a_n$. Akibatnya, jika $n = 3$ maka f tak tereduksi di $\mathbb{Q}[x]$ bila $f(r/s) \neq 0$ untuk setiap pembagi r dari a_0 dan s dari a_n.

Bukti. Dari $0 = f\left(\frac{r}{s}\right) = \Sigma_{i=0}^{n} a_i r^i / s^i$, yaitu dari $0 = \sum_{i=0}^{n} a_i r^i s^{n-i}$, didapat $r|a_0 s^n$ dan $s|a_n r^n$. Berhubung $\gcd(r,s) = 1$ diperoleh $r|a_0$ dan $s|a_n$.

Pada bagian ini akan ditunjukkan bahwa jawaban dari pertanyaan (P1) adalah tidak mungkin. Hal ini dibuktikan dengan tidak terlukisnya sudut 20°, yang merupakan kasus khusus ketika $\alpha = 60°$ dengan memanfaatkan Dalil 8. Supaya dalil tersebut dapat digunakan, perlu dicari $a \in R$ beserta polinom minimalnya. Pada kasus (P1), a yang dipilih adalah cos 20°, karena sudut 20° dapat dilukis jika dan hanya jika cos 20° $\in \mathbb{L}$. Untuk bukti selengkapnya dapat dilihat pada dalil 10.

Dalil 10. Sudut 60° tidak bisa dibagi tiga.

Bukti. Jika sudut 60° bisa dibagi tiga maka sudut $\theta = 20°$ dapat dilukis, yang berakibat $a = \cos\theta \in \mathbb{L}$. Tetapi identitas

$$\frac{1}{2} = \cos 3\theta = 4\cos 3\theta - 3\cos\theta$$

menunjukkan bahwa a berupa akar dari $p(x) = 8x^3 - 6x - 1$. Dapat diperiksa dari Dalil 9 bahwa $p(x)$ tak tereduksi di $\mathbb{Q}[x]$, sehingga $a \notin \mathbb{L}$. Oleh karena itu, sudut 20° tidak dapat dilukis. Akibatnya, sudut 60° tidak dapat dibagi tiga.

Dalil 10 juga mengakibatkan sudut $2n \cdot 20°$ tidak dapat dapat dilukis untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$. Oleh sebab itu, tidak ada metode untuk membagi tiga sebuah sudut. Akibat lain yang didapat adalah segi-9 tidak dapat dilukis sebab sudut 40° tidak dapat dilukis.

Jawaban dari pertanyaan (P2) juga negatif. Ketika suatu kubus dengan panjang rusuk r digandakan volumenya, kubus baru memiliki rusuk sepanjang $r\sqrt[3]{2}$. Jadi untuk menjawab (P2) cukup diperiksa apakah $\sqrt[3]{2}$ berada di $\mathbb{L}$ atau tidak.

Sehingga bilangan a yang dipilih pada kasus (P2) adalah $\sqrt[3]{2}$. Untuk bukti selengkapnya dapat dilihat pada dalil 11 berikut.

Dalil 11. Diberikan suatu kubus, tidak mungkin melukis kubus yang volumenya dua kali dari volume kubus semula.
Bukti. Misal panjang rusuk dari kubus yang diberikan adalah r. Jika volumenya dapat digandakan maka $r\sqrt[3]{2} \in \mathbb{L}$ yang berakibat $a = \sqrt[3]{2} \in \mathbb{L}$. Tetapi a berupa akar dari polinom $p(x) = x^3 - 2$ yang tak tereduksi di $\mathbb{Q}[x]$. Oleh sebab itu, $a = \sqrt[3]{2} \notin \mathbb{L}$. Jadi, sembarang kubus tidak dapat digandakan volumenya, karena $a = \sqrt[3]{2} \notin \mathbb{L}$.

4. KESIMPULAN DAN SARAN

Pada makalah ini telah ditunjukan bahwa dengan hanya menggunakan jangka dan mistar tanpa skala, tidak mungkin untuk melukis sebuah sudut dengan ukuran sepertiga dari sudut semula, serta tidak mungkin menggambar kubus yang volumenya dua kali dari volume sebelumnya. Pembuktian ini berlandaskan pada dalil jika bilangan riil a adalah akar dari sembarang polinom $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ yang tak tereduksi di $\mathbb{Q}[x]$ dan deg p bukan berupa pangkat dari 2 maka a tidak dapat dilukis. Masalah menentukan keterlukisan geometri adalah ekuivalen dengan mencari suatu $a \in \mathbb{R}$ lalu menentukan apakah a terlukis atau tidak. Setelah a didapat, untuk menentukan keterlukisannya dilakukan dengan cara mencari polinom $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ sehingga $p(a) = 0$ dan diharapkan $p(x)$ tak tereduksi di $\mathbb{Q}[x]$.

Pada permasalahan menggandakan volume kubus, a beserta polinom yang dimaksud keduanya mudah ditemukan. Namun untuk permasalahan membagi tiga sebuah sudut, pencarian a tidak mudah, begitu juga pencarian polinomnya. Untuk itu, dapat dilakukan penelitian lebih lanjut tentang bagaimana menemukan a dan polinomnya dari suatu permasalahan lukisan yang akan dipecahkan.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Rediske, A. C. (2018). The Trisection of an Arbitrary Angle: A Classical Geometric Solution. *Journal: Journal of Advances in Mathematics*, *14*(02).

[2] Kalanov, T. (2010). The modern analysis of the problem of multisecting an angle. *Prespacetime Journal*, *1*(3).

[3] Lützen, J. (2010). The Algebra of Geometric Impossibility: Descartes and Montucla on the Impossibility of the Duplication of the Cube and the Trisection of the Angle. *Centaurus*, *52*(1), 4-37.

[4] Sohrab, S. H. (2012, January). A possible solution of trisection problem. In *Proceedings of the 6th WSEAS international conference on Computer Engineering and Applications, and Proceedings of the 2012 American conference on Applied Mathematics* (pp. 277-285).

[5] Martin, G.E. 1991. Geometric Constructions 2nd ed., Springer-Verlag, New York.

[6] Porter, A. F. (1994). Duplication of the cube. *Survey Review*, *32*(251), 303-306.

[7] Willis, L. A. (2015). Duplication of a Cube. *American Journal of Applied Mathematics*, *3*(6), 256-258.

[8] Herstein, I.N. 1999. Abstract Algebra 3rd ed., John Wiley & Sons, New York.

[9] Gallian, Joseph A. 2010. Contemporary Abstract Algebra 7th ed., Brooks/Cole,California.

[10] Lang, Serge. 2004. Linear Algebra 3rd ed., Springer-Verlang, New York.