Jurnal EurekaMatika 10(1) (2022) 1-10

Jurnal EurekaMatika

Journal homepage: https://ejournal.upi.edu/index.php/JEM

Hasil *Cross Product* dari Dua Graf-k

Rizza Lestari, Rizky Rosjanuardi, Sumanang Muhtar Gozali*

Program Studi Matematika, Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Pendidikan Indonesia, Indonesia

*Correspondence: E-mail: rizzalestari313@gmail.com

A B S T R A K

Artikel ini membahas tentang hasil *cross product* dari dua graf-k. Dalam penelitian ini dibahas mengenai struktur dari graf-k, yang terdiri dari kategori dan fungtor yang memenuhi sifat faktorisasi. Selanjutnya dibahas bagaimana hasil *cross product* dari dua graf- k, yang mencakup produk kategori dan fungtor untuk produk kategori tersebut. Lalu diberikan ilustrasi bagaimana membentuk graf-$(\mathrm{k}_1+\mathrm{k}_2)$ dari dua graf$-k$ yang berbeda, yaitu graf$-\mathrm{k}_1$ dan graf$-\mathrm{k}_2$.

INFORMASI ARTIKEL

Sejarah Artikel:
Diterima 3 Agustus 2021
Direvisi 10 Agustus 2021
Disetujui 5 Oktober 2021
Tersedia online 15 Mei 2022
Dipublikasikan 1 Juni 2022

Kata Kunci:
Cross Product,
Fungtor,
Fungtor untuk Kategori Produk,
Graf$-k$,
Kategori.

A B S T R A C T

This article discusses results of cross product of two k-graphs. This study discusses the structure of the k-graphs, which consists of category and functor that satisfying the factorisation property. Furthermore, we discussed the crossed product results from two k-graphs, which includes product category and functor for such product category. Then an illustration is given on how to form a $(k_1+k_2)-$*graph from two different* $k-$*graphs, namely* k_1-*graph and* k_2-*graph.*

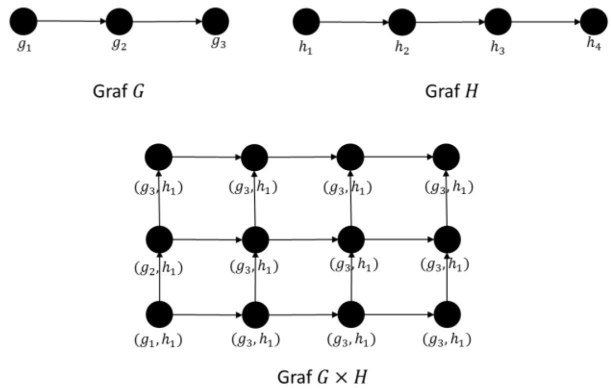
Keywords:
Category,
Cross Product,
Functor,
Functor for Product,
$k-$Graph.

1. PENDAHULUAN

Misalkan terdapat dua himpunan tak kosong A dan B. Menurut Definisi 1.1.5 pada buku '*Introduction to Real Analysis*' yang ditulis oleh Bartle dan Sherbert, tahun 2000, produk kartesius dari dua buah himpunan A dan B adalah himpunan $A \times B$ yang berisi semua pasangan terurut (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$, yang bisa dituliskan sebagai $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

Menurut Damayanti (2011), Anggraeni (2015), Soleha et al. (2017), Utomo & Dewi (2018), Febriyanti et al. (2019), sebuah graf dapat dipandang sebagai pasangan dari himpunan (V, E), di mana V adalah himpunan berhingga dan tak kosong dari elemen-elemen yang disebut simpul dan E adalah himpunan tak terurut dari pasangan simpul-simpul berbeda yang disebut sisi. Oleh karena itu dapat dibicarakan produk kartesius dari dua buah graf. Berdasarkan definisi pada Khalifeh et al. (2008), Purwati & Rudianto (2019) produk kartesius dari graf G dan H, dinotasikan $G \times H$, adalah graf dengan himpunan simpul $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$, yaitu himpunan $\{(\mathrm{g}, \mathrm{h}) : \mathrm{g} \in \mathrm{V(G)}, \mathrm{h} \in \mathrm{V(H)}\}$. Himpunan sisi dari $G \times H$ berisi semua pasangan $[(\mathrm{g}_1, \mathrm{h}_1), (\mathrm{g}_2, \mathrm{h}_2)]$ dari simpul dengan $[\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2] \in \mathrm{E(G)}$ di mana $E(G)$ adalah himpunan sisi dari graf G dan $\mathrm{h}_1 = \mathrm{h}_2$, atau $[\mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2] \in \mathrm{E(H)}$ di mana $E(H)$ adalah himpunan sisi dari graf H dan $\mathrm{g}_1 = \mathrm{g}_2$.

Gambar 1 merupakan contoh produk kartesius dari graf G dan H. Diketahui bahwa $V(G) = \{g_1, g_2, g_3\}$ dan $V(H) = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ sehingga himpunan simpul dari graf $G \times H$ adalah $V(G \times H) = \{(g_i, h_j) : g_i \in V(G), h_j \in V(H)\ untuk\ 1 \leq i \leq 3\ dan\ 1 \leq j \leq 4\}$.



Gambar 1. Graf G, Graf H dan Graf $G \times H$.

Kumjian dan Pask (2000) memperkenalkan notasi baru yaitu graf-k untuk memperumum konstruksi aljabar-C^* dari graf berarah yang dibahas pada artikel-artikel terkait sebelumnya yaitu Kumjian dan Pask (1999) dan Kumjian et al. (1998). Pengenalan teori graf-k oleh Kumjian dan Pask (2000) dan adanya produk kartesius dari dua buah graf memotivasi penulis untuk menggali lebih lanjut mengenai bagaimana hasil *cross product* dari dua buah graf-k.

2. METODE

Langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini, pertama-tama mengidentifikasi graf-k_1 $(\Lambda_1, \mathrm{d}_1)$ dan graf-k_2 (Λ_2, d_2) menurut Definisi 3.3 sehingga memperoleh komposisi dari $\lambda_1 \in \Lambda_1$ dan $\lambda_2 \in \Lambda_2$ yang bersifat unik. Juga memperoleh sifat faktorisasi pada masing-masing fungtor d_1 dan d_2. Lalu dengan menggunakan Definisi 3.6 diperoleh komposisi yang unik dari (λ_1, λ_2). Untuk menunjukkan sifat faktorisasinya, identifikasi lebih dulu bahwa $N^{k_1} \times N^{k_2} = N^{k_1+k_2}$ berdasarkan pada Contoh 3.7. Lalu dengan melakukan substitusi pada definisi fungtornya menurut Proposisi 1, diperoleh bahwa fungtor untuk kategori produk $\mathrm{d}_1 \times \mathrm{d}_2$ memenuhi sifat faktorisasi.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Definisi dan Contoh

Definisi 3.1 Kategori

Dikutip dari buku '*Algebra*' karangan Hungerford tahun 1974, sebuah kategori adalah kelas $\mathcal{C}$ dari objek yang dinotasikan dengan $A, B, C, \ldots$ bersama dengan:

1. Kelas dari himpunan-himpunan yang saling disjoin, dinotasikan $\hom(A, B)$, sebuah himpunan untuk setiap sepasang objek pada $\mathcal{C}$ (elemennya berupa $f : A \to B$, disebut morfisma dari A ke B).
2. Untuk setiap (A, B, C) dari objek di $\mathcal{C}$, fungsi
$$hom(B, C) \times hom(A, B) \to hom(A, C)$$
(untuk morfisma $f : A \to B$ dan $g : B \to C$, fungsinya ditulis sebagai $(g, f) \mapsto g \circ f$ dan $g \circ f : A \to C$ disebut komposisi dari f dan g) yang memenuhi dua aksioma yaitu:
   a. Asosiatif. Jika $f : A \to B$, $g : B \to C$ dan $h : C \to D$ adalah morfisma di $\mathcal{C}$, makah $\circ$ $(\mathrm{g} \circ \mathrm{f}) = (\mathrm{h} \circ \mathrm{g}) \circ \mathrm{f}$.
   b. Elemen identitas. Untuk setiap objek B di $\mathcal{C}$ terdapat sebuah morfisma $1_B : B \to B$ sedemikian sehingga untuk sebarang $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ berlaku $1_\mathrm{B} \circ \mathrm{f} = \mathrm{f}$ dan $\mathrm{g} \circ 1_\mathrm{B} = \mathrm{g}$.

Definisi 3.2 Fungtor

Misalkan $\mathcal{C}$ dan $\mathcal{D}$ adalah kategori. Dikutip dari buku '*Algebra*' yang ditulis oleh Hungerford tahun 1974, sebuah fungtor kovarian T dari $\mathcal{C}$ ke $\mathcal{D}$ (dinotasikan dengan $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$) adalah sepasang fungsi (keduanya dinotasikan dengan T), fungsi pertama adalah fungsi yang memasangkan setiap objek C dari $\mathcal{C}$ ke objek $T(C)$ dari $\mathcal{D}$ dan fungsi kedua memasangkan setiap morfisma $f : C \to C'$ dari $\mathcal{C}$ ke morfisma $T(f) : T(C) \to T(C')$ dari $\mathcal{D}$, sedemikian sehingga memenuhi:

1. $\mathrm{T}(1_\mathrm{C}) = 1_{\mathrm{T(C)}}$, untuk setiap morfisma identitas 1_C di $\mathcal{C}$.
2. $\mathrm{T}(\mathrm{g} \circ \mathrm{f}) = \mathrm{T}(\mathrm{g}) \circ \mathrm{T}(\mathrm{f})$ untuk sebarang dua morfisma f, g di $\mathcal{C}$ di mana komposisi $g \circ f$ terdefinisi.

Definisi 3.3 Graf-k (Kumjian dan Pask, 2000)

Sebuah graf-k (Λ, d) berisi kategori kecil terhitung Λ (dengan pemetaan hasil dan sumber secara berurutan adalah r dan s) bersama dengan fungtor $d : \Lambda \to N^k$ yang memenuhi sifat faktorisasi yaitu untuk setiap $\lambda \in \Lambda$ dan $m, n \in N^k$ dengan $d(\lambda) = m + n$, terdapat elemen unik $\mu, \nu \in \Lambda$ sedemikian sehingga $\lambda = \mu\nu$ dan $d(\mu) = m$, $d(\nu) = n$. Untuk $n \in N^k$, definisikan $\Lambda^n = d^{-1}(n)$, di mana himpunan Λ^n berisi semua objek yang jika dipetakan oleh fungtor d maka akan bernilai n atau bisa juga dipandang sebagai himpunan lintasan dengan panjang n.

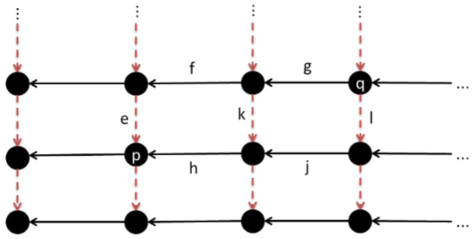
Contoh 3.4

Definisikan graf-k Ω_k dengan membuat $\Omega_k^0 = N^k$, $\Omega_k^* = \{(p,q) : p, q \in N^k$ dan $p_i \le q_i$ untuk semua $i\}$, $r(p,q) = p$, $s(p,q) = q$, dan $d(p,q) = q - p$. Lalu definisikan juga komposisinya dengan $(p,q)(q,r) = (p,r)$. Maka Ω_k adalah sebuah graf-k.

Contoh 3.5

Kerangka-1 dari graf-2 Ω_2 terlihat seperti Gambar 2, di mana sisi pada $\Omega_2^{e_2}$ (sisi dengan derajat (0,1)) berwarna merah dan sisi pada $\Omega_2^{e_1}$ (sisi dengan derajat (1,0)) berwarna hitam. Pada gambar di bawah, lintasan (p,q) mempunyai derajat (2,1). Perhatikan bahwa lintasan (p,q) mempunyai tiga faktorisasi yaitu:

1. $(p,q) = efg = (1,0) + (1,0) + (0,1)$
2. $(p,q) = hkg = (1,0) + (0,1) + (1,0)$
3. $(p,q) = hjl = (0,1) + (1,0) + (1,0)$.



Gambar 2. Kerangka-1 dari graf-2 Ω_2

Definisi 3.6 Produk Kategori

Berdasarkan Hungerford dalam bukunya yang berjudul '*Algebra*' tahun 1974, misalkan $\mathcal{C}$ dan $\mathcal{D}$ keduanya kategori, produk dari keduanya adalah kategori $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ di mana objeknya adalah semua pasangan (C, D), dengan C adalah objek pada $\mathcal{C}$ dan D adalah objek pada $\mathcal{D}$. Morfisma dari $(C, D) \mapsto (C', D')$ pada $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ adalah pasangan (f, g) di mana $f : C \to C'$ adalah morfisma pada $\mathcal{C}$ dan $g : D \to D'$ adalah morfisma pada $\mathcal{D}$. Komposisinya diberikan oleh $(f', g') \circ (f, g) = (f' \circ f, g' \circ g)$. Produk untuk kategori yang jumlahnya lebih dari dua juga didefinisikan serupa.

Contoh 3.7

Misalkan N^{k_1} dan N^{k_2} adalah dua buah kategori, produk dari keduanya adalah kategori $N^{k_1} \times N^{k_2}$ di mana objeknya adalah semua pasangan (m, n) dengan m adalah objek pada N^{k_1} dan n adalah objek pada N^{k_2}. Morfisma dari $(m, n) \mapsto (m', n')$ pada $N^{k_1} \times N^{k_2}$ adalah pasangan (f, g) di mana $f : m \to m'$ adalah morfisma pada N^{k_1} dan $g : n \to n'$ adalah morfisma pada N^{k_2}. Komposisinya diberikan oleh $(\mathrm{f}', \mathrm{g}') \circ (\mathrm{f}, \mathrm{g}) = (\mathrm{f}' \circ \mathrm{f}, \mathrm{g}' \circ \mathrm{g})$.

Jika diperhatikan, objek pada $N^{k_1} \times N^{k_2}$ adalah pasangan terurut (m, n) di mana $m = (m_1, m_2, \dots m_{k_1})$ adalah objek pada N^{k_1} dan $n = \left(n_1, n_2, \dots, n_{k_2}\right)$ adalah objek pada N^{k_2}. Jika ditulis menjadi pasangan terurut, maka diperoleh

$$(m, n) = (m_1, m_2, \dots m_{k_1}, n_1, n_2, \dots, n_{k_2})$$

Sehingga bisa terlihat bahwa $N^{k_1} \times N^{k_2} = N^{k_1+k_2}$.

3.2 Hasil dan Contoh

Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai hasil *cross product* dari dua graf-k, bagaimana hasil objek yang akan terbentuk, dan fungtor yang digunakan untuk memenuhi sifat faktorisasinya sehingga menjadi sebuah graf-k yang baru. Lalu diberikan juga contoh bagaimana elemen dan fungtor dari hasil *cross product* tersebut diperoleh.

Proposisi 1 (Kumjian dan Pask, 2000)

Misalkan (Λ_1, d_1) adalah graf-k_1 dan (Λ_2, d_2) adalah graf-k_2, maka $(\Lambda_1 \times \Lambda_2, d_1 \times d_2)$ adalah graf-$(k_1 + k_2)$ dimana $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ adalah kategori produk dan $d_1 \times d_2 : \Lambda_1 \times \Lambda_2 \longrightarrow N^{k_1+k_2}$ yang diberikan oleh $d_1 \times d_2(\lambda_1, \lambda_2) = \left(d_1(\lambda_1), d_2(\lambda_2)\right) \in N^{k_1} \times N^{k_2}$ untuk $\lambda_1 \in \Lambda_1$ dan $\lambda_2 \in \Lambda_2$.

Bukti:

(Λ_1, d_1) adalah graf-k_1. Maka menurut Definisi 3.1, Λ_1 adalah kategori kecil terhitung bersama dengan fungtor $d_1 \colon \Lambda_1 \to N^{k_1}$ yang memenuhi sifat faktorisasi yaitu untuk setiap $\lambda_1 \in \Lambda_1$ dan $m_1, n_1 \in N^{k_1}$ dengan $d_1(\lambda_1) = m_1 + n_1$, terdapat elemen unik $\mu_1, \nu_1 \in \Lambda_1$ sedemikian sehingga $\lambda_1 = \mu_1 \circ \nu_1$ dan $d_1(\mu_1) = m_1,\ d_1(\nu_1) = n_1$.

(Λ_2, d_2) adalah graf-k_2. Maka menurut Definisi 3.1, Λ_2 adalah kategori kecil terhitung bersama dengan fungtor $d_2 \colon \Lambda_2 \to N^{k_2}$ yang memenuhi sifat faktorisasi yaitu untuk setiap $\lambda_2 \in \Lambda_2$ dan $m_2, n_2 \in N^{k_2}$ dengan $d_2(\lambda_2) = m_2 + n_2$, terdapat elemen unik $\mu_2, \nu_2 \in \Lambda_2$ sedemikian sehingga $\lambda_2 = \mu_2 \circ \nu_2$ dan $d_2(\mu_2) = m_2,\ d_2(\nu_2) = n_2$.

$\Lambda_1 \times \Lambda_2$ adalah kategori produk, menurut Definisi 3.4 objeknya adalah semua pasangan terurut (λ_1, λ_2), di mana λ_1 adalah objek pada Λ_1 dan λ_2 adalah objek pada Λ_2. Morfisma dari $(\lambda_1, \lambda_2) \to ({\lambda_1}', {\lambda_2}')$ pada $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ adalah pasangan (f, g) di mana $f \colon \lambda_1 \to {\lambda_1}'$ adalah morfisma pada Λ_1 dan $g \colon \lambda_2 \to {\lambda_2}'$ adalah morfisma pada Λ_2. Komposisinya diberikan oleh $(\lambda_1', \lambda_2') \circ (\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_1' \circ \lambda_1, {\lambda_2}' \circ \lambda_2)$.

Dengan definisi fungtor $d_1 \times d_2(\lambda_1, \lambda_2) = \left(d_1(\lambda_1), d_2(\lambda_2)\right)$, akan ditunjukkan sifat faktorisasinya.

Ambil sebarang $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2$ dengan $d_1 \times d_2(\lambda_1, \lambda_2) = m + n$ untuk suatu $m, n \in N^{k_1+k_2}$. Akan ditunjukkan terdapat elemen unik $(\mu_1, \mu_2), (\nu_1, \nu_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2$ sedemikian sehingga $(\lambda_1, \lambda_2) = (\mu_1, \mu_2) \circ (\nu_1, \nu_2)$ dan $d_1 \times d_2(\mu_1, \mu_2) = m,\ d_1 \times d_2(\nu_1, \nu_2) = n$.

Menurut definisi graf-k_1 Λ_1, diperoleh $\lambda_1 = \mu_1 \circ \nu_1$ di mana μ_1, ν_1 unik pada Λ_1 dan menurut definisi graf-k_2 pada Λ_2, diperoleh $\lambda_2 = \mu_2 \circ \nu_2$ di mana μ_2, ν_2 unik pada Λ_2. Lalu menurut definisi komposisinya, diperoleh $(\lambda_1, \lambda_2) = (\mu_1 \circ \nu_1, \mu_2 \circ \nu_2) = (\mu_1, \mu_2) \circ (\nu_1, \nu_2)$. Artinya, terdapat $(\mu_1, \mu_2), (\nu_1, \nu_2)$ unik pada $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ sedemikian sehingga $(\lambda_1, \lambda_2) = (\mu_1, \mu_2) \circ (\nu_1, \nu_2)$.

Lalu perhatikan bahwa $d_1 \times d_2(\lambda_1, \lambda_2) = d_1 \times d_2(\mu_1 \circ \nu_1, \mu_2 \circ \nu_2) = \left(d_1(\mu_1 \circ \nu_1), d_2(\mu_2 \circ \nu_2)\right) = m + n$. Menurut contoh 3.5, diperoleh $N^{k_1+k_2} = N^{k_1} \times N^{k_2}$. Maka $m + n = (m_1 + n_1, m_2 + n_2) = (m_1, m_2) + (n_1, n_2)$, sehingga diperoleh $m = (m_1, m_2)$ dan $n = (n_1, n_2)$.

Selanjutnya perhatikan bahwa $\left(d_1(\mu_1 \circ \nu_1), d_2(\mu_2 \circ \nu_2)\right) = (m_1 + n_1, m_2 + n_2)$, maka $d_1(\mu_1 \circ \nu_1) = m_1 + n_1$ dan $d_2(\mu_2 \circ \nu_2) = m_2 + n_2$. Menurut sifat faktorisasi pada graf-k_1 Λ_1 dan graf-k_2 Λ_2, jika $d_1(\lambda_1) = m_1 + n_1$ dengan $\lambda_1 = \mu_1 \circ \nu_1$ maka $d_1(\mu_1) = m_1$, $d_1(\nu_1) = n_1$ dan jika $d_2(\lambda_2) = m_2 + n_2$ dengan $\lambda_2 = \mu_2 \circ \nu_2$ maka $d_2(\mu_2) = m_2$, $d_2(\nu_2) = n_2$. Sehingga diperoleh:

$$d_1 \times d_2(\mu_1, \mu_2) = \left(d_1(\mu_1), d_2(\mu_2)\right) = (m_1, m_2) = m \text{ dan}$$
$$d_1 \times d_2(\nu_1, \nu_2) = \left(d_1(\nu_1), d_2(\nu_2)\right) = (n_1, n_2) = n.$$

sehingga sifat faktorisasinya terpenuhi. ■

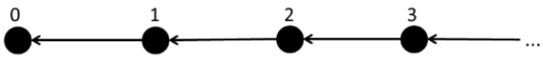
Contoh 3.9 (Kumjian dan Pask, 2000)

Contoh masalah untuk menggambarkan Proposisi 1 tersebut adalah $\Omega_{k+l} \cong \Omega_k \times \Omega_l$ di mana $k, l > 0$. Misalkan diambil $k = l = 1$. Akan ditunjukkan bahwa elemen dan fungtor untuk $\Omega_1 \times \Omega_1$ bersesuaian dengan elemen dan fungtor pada graf-2 Ω_2.

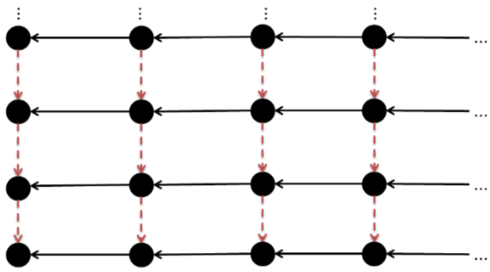
Berdasarkan definisi pada contoh 3.2, objek pada Ω_{11} dan Ω_{12} adalah $N = \{0,1,2, \dots\}$ dan objek pada Ω_2 adalah $N^2 = \{(a_1, a_2) : a_1 \leq a_2,\ a_1 \in \Omega_{11},\ a_2 \in \Omega_{12}\}$. Ilustrasi Graf-1 Ω_{11} dan Graf-1 Ω_{12} terdapat pada Gambar 3 dan Gambar 4.

Dapat diamati bahwa elemen pada Ω_2 adalah pasangan terurut dari masing-masing objek pada Ω_{11} dan Ω_{12}. Ilustrasi terdapat pada Gambar 5.

Gambar 3. Graf-1 Ω_{11}



Gambar 4. Graf-1 Ω_{12}



Gambar 5. Graf-2 Ω_2

Notasikan objek pada Ω_{11} sebagai himpunan $\{a_{1_1}, a_{1_2}, \dots\} \in N$. Fungtornya didefinisikan oleh $d_1(a_{1_1}, a_{1_2}) = a_{1_2} - a_{1_1}$. Lalu notasikan juga objek pada Ω_{12} sebagai himpunan $\{a_{2_1}, a_{2_2}, \dots\} \in N$. Fungtornya didefinisikan oleh $d_2(a_{2_1}, a_{2_2}) = a_{2_2} - a_{2_1}$. Perhatikan bahwa objek pada Ω_2 bisa dinyatakan dengan himpunan $\{(a_{1_1}, a_{2_1}), (a_{1_2}, a_{2_2}), \dots\} \in N^2$ dan fungtor yang terdefinisi adalah

$$\begin{aligned} d\left((a_{1_1}, a_{2_1}), (a_{1_2}, a_{2_2})\right) &= (a_{1_2}, a_{2_2}) - (a_{1_1}, a_{2_1}) = (a_{1_2} - a_{1_1}, a_{2_2} - a_{2_1}) \\ &= \left(d_1(a_{1_1}, a_{1_2}), d_2(a_{2_1}, a_{2_2})\right). \end{aligned}$$

Maka diperoleh elemen dan fungtor untuk hasil *cross product* yaitu Ω_2 bersesuaian dengan pernyataan pada Proposisi 1.

Definisi 3.10 (Kumjian dan Pask, 2000)

Misalkan $f : N^l \to N^k$ adalah morfisma monoid, maka jika (Λ, d) adalah graf-k maka dapat dibentuk graf-l $f^*(\Lambda)$ di mana objek-objek dari $f^*(\Lambda)$ dapat diidentifikasi dari objek pada Λ dan$f^*(\Lambda) = \{(\lambda, n) : d(\lambda) = f(n)\}$ dengan $d(\lambda, n) = n$, $s(\lambda, n) = s(\lambda)$, dan $r(\lambda, n) = r(\lambda)$.

Contoh 3.11 (Kumjian dan Pask, 2000)

Misalkan Λ adalah graf-k dan kita ambil $l = 1$. Jika kita definisikan morfisma $f_i(n) = ne_i$ untuk $1 \leq i \leq k$, kita mendapat graf koordinat $\Lambda_i = f_i^*(\Lambda)$ dari Λ yang merupakan graf-1.

Menurut Definisi 3.3, kita punya $f : N \to N^k$ dengan $f_i(n) = ne_i$ untuk $1 \leq i \leq k$. Misalkan kita ambil $k = 2$. Maka kita punya dua morfisma yaitu $f_1(n) = ne_1 = (n, 0)$ dan $f_2(n) = ne_2 = (0, n)$, lalu diperoleh juga:

1. $f_1^*(\Lambda) = \{(\lambda, n) : d(\lambda) = f_1(n) = (n, 0)\}$ dengan $d(\lambda, n) = n$, $s(\lambda, n) = s(\lambda)$, dan $r(\lambda, n) = r(\lambda)$. Himpunan $f_1^*(\Lambda)$ berisi pasangan terurut (λ, n) dengan $\lambda \in \Lambda$ yang merupakan graf-2 dengan syarat λ mempunyai derajat $(n, 0)$. Misalkan $\lambda = ((a_1, a_2), (b_1, b_2))$ dan $d(\lambda) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$. Sehingga diperoleh $b_1 - a_1 = n$ dan $b_2 - a_2 = 0 \Leftrightarrow b_2 = a_2$. Ingat bahwa $\Lambda = \{\big((a_1, a_2), (b_1, b_2)\big) : a_i \leq b_i \; untuk \; i = 1,2\}$.

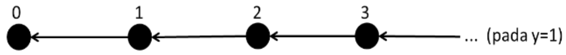
   (a) Misalkan untuk $a_2 = b_2 = 0$, kita punya

   $\lambda = \big((0,0), (0,0)\big)$, jika $b_1 = 0$

   $\lambda = ((0,0), (1,0))$ dan $((1,0), (1,0))$, jika $b_1 = 1$

   $\lambda = \big((0,0), (2,0)\big)$, $\big((1,0), (2,0)\big)$, dan $((2,0), (2,0))$, jika $b_1 = 2$.

   dan seterusnya (untuk $b_1 = 0,1,2,3, \dots$). Sehingga diperoleh kerangkanya yang terdapat pada Gambar 6.



Gambar 6. Kerangka Kasus (a)

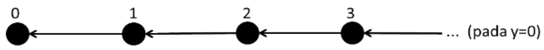
   (b) Misalkan untuk $a_2 = b_2 = 1$, kita punya

   $\lambda = \big((0,1), (0,1)\big)$, jika $b_1 = 0$

   $\lambda = ((0,1), (1,1))$ dan $((1,1), (1,1))$, jika $b_1 = 1$

   $\lambda = \big((0,1), (2,1)\big)$, $\big((1,1), (2,1)\big)$, dan $((2,1), (2,1))$, jika $b_1 = 2$

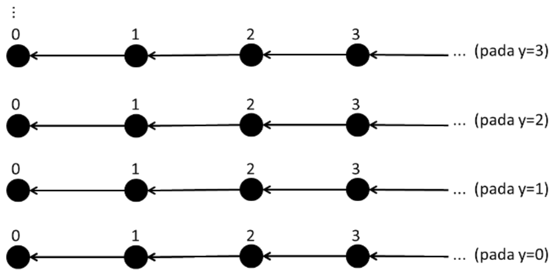
   dan seterusnya (untuk $b_1 = 0,1,2,3, \dots$). Sehingga diperoleh kerangkanya yang diilustrasikan pada Gambar 7.



Gambar 7. Kerangka Kasus (b)

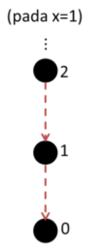
Sehingga secara keseluruhan kerangka untuk $a_2 = b_2 = 0,1,2,3, \dots$ dan untuk $b_1 = 0,1,2,3, \dots$ adalah graf yang digambarkan pada Gambar 8.

p- ISSN 2776-480X, e- ISSN 2528-4231

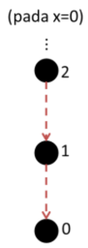


Gambar 8. Kerangka Keseluruhan Kasus 1

2. $f_2^*(\Lambda) = \{(\lambda, n) : d(\lambda) = f_2(n) = (0, n)\}$ dengan $d(\lambda, n) = n$, $s(\lambda, n) = s(\lambda)$, dan $r(\lambda, n) = r(\lambda)$. Himpunan $f_2^*(\Lambda)$ berisi pasangan terurut (λ, n) dengan $\lambda \in \Lambda$ yang merupakan graf-2 dengan syarat λ mempunyai derajat $(0, n)$. Misalkan $\lambda = ((a_1, a_2), (b_1, b_2))$ dan $d(\lambda) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$. Sehingga diperoleh $b_1 - a_1 = 0 \Leftrightarrow b_1 = a_1$. dan $b_2 - a_2 = n$. Ingat bahwa $\Lambda = \{\big((a_1, a_2), (b_1, b_2)\big) : a_i \leq b_i\ untuk\ i = 1,2\}$.
   (a) Misalkan $a_1 = b_1 = 0$, maka kita punya
   $\lambda = \big((0,0), (0,0)\big)$, jika $b_2 = 0$
   $\lambda = \big((0,0), (0,1)\big)$ dan $\big((0,1), (0,1)\big)$, jika $b_2 = 1$
   $\lambda = \big((0,0), (0,2)\big)$, $\big((0,1), (0,2)\big)$, dan $((0,2), (0,2))$, jika $b_2 = 2$
   dan seterusnya (untuk $b_2 = 0,1,2,3, \dots$). Sehingga diperoleh kerangkanya adalah seperti pada Gambar 9.
   (b) Misalkan $a_1 = b_1 = 1$, maka kita punya
   $\lambda = \big((1,0), (1,0)\big)$, jika $b_2 = 0$
   $\lambda = \big((1,0), (1,1)\big)$ dan $\big((1,1), (1,1)\big)$, jika $b_2 = 1$
   $\lambda = \big((1,0), (1,2)\big)$, $\big((1,1), (1,2)\big)$, dan $((1,2), (1,2))$, jika $b_2 = 2$
   dan seterusnya (untuk $b_2 = 0,1,2,3, \dots$). Sehingga diperoleh kerangkanya adalah seperti Gambar 10.

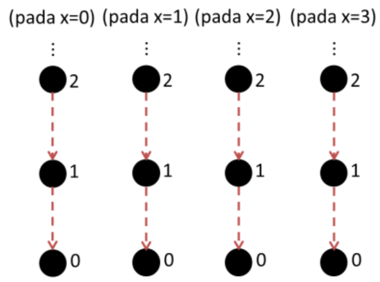


Gambar 9. Kerangka Kasus (a)



Gambar 10. Kerangka Kasus (b)

Sehingga secara keseluruhan kerangka untuk $a_1 = b_1 = 0,1,2,3, \dots$ dan untuk $b_2 = 0,1,2,3, \dots$ adalah graf yang tersaji pada Gambar 11.



Gambar 11. Kerangka Keseluruhan Kasus 2

4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dalam artikel ini, maka dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Misalkan (K, d_1) adalah graf-k_1 dan (L, d_2) adalah graf-k_2. Bagaimanakah memandang $K \times L$ sebagai graf-$(k_1 + k_2)$?
   $K \times L$ bisa dipandang sebagai graf-$(k_1 + k_2)$ $(K \times L, d_1 \times d_2)$, di mana $(K \times L, d_1 \times d_2)$ juga mempunyai struktur yang sama dengan graf-*k* pada umumnya, yaitu memuat kategori produk dan fungtor untuk kategori produk yang memenuhi sifat faktorisasi.
2. Bagaimanakah bentuk objek kategori, morfisma, dan fungtor pada $K \times L$?
   (a) Bentuk objek kategori dari $K \times L$ adalah kategori produk dari kedua kategori pada masing-masing graf-k_1 dan graf-k_2, yaitu $K \times L = \{(k_i, l_i) : k_i \in K,\ l_i \in L\}$.
   (b) Bentuk morfismanya adalah himpunan pasangan terurut $\left((k_i, l_i), (k_j, l_j)\right)$ di mana $k_i, k_j \in K,\ l_i, l_j \in L$ untuk setiap $i, j \in \mathbb{N}$.
   (c) Definisi fungtor atau pemetaan morfisma yang terbetuk juga mengikuti fungtor dari graf-k_1 dan graf-k_2 yaitu dengan mendefinisikannya sebagai pasangan terurut, sehingga fungtor untuk $K \times L$ adalah $d_1 \times d_2(k_i, l_i) = (d_1(k_i), d_2(l_i))$ untuk sebarang objek $(k_i, l_i) \in K \times L$.

Kesimpulan ini sesuai dengan proposisi 1 (Kumjian dan Pask, 2000).

5. DAFTAR PUSTAKA

Anggraeni, W. (2015). Pembentukan word graph preposisi bahasa Indonesia menggunakan metode *knowledge graph. Faktor Exacta*, *3*(2), 111-126.

Damayanti, R. T. (2011). Automorfisme graf bintang dan graf lintasan. *Cauchy: Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*, *2*(1), 35-40.

Febrianti, F., Yulianti, L., & Narwen, N. (2019). Dimensi metrik pada graf amalgamasi tangga segitiga diperumum homogen. *Jurnal Matematika UNAND*, *8*(1), 84-90.

Khalifeh, M. H., Yousefi-Azari, H., & Ashrafi, A. R. (2008). Vertex and edge PI indices of Cartesian product graphs. *Discrete Applied Mathematics*, *156*(10), 1780-1789.

Kumjian, A., & Pask, D. (1999). C*-algebras of directed graphs and group actions. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, *19*(6), 1503-1519.

Kumjian, A., & Pask, D. (2000). Higher rank graph C*-algebra*. New York Journal of Mathematics*, *6*, 1-20.

Kumjian, A., Pask, D., & Raeburn, I. (1998). Cuntz–Krieger algebras of directed graphs. *Pacific Journal of Mathematics*, *184*(1), 161-174.

Purwati, D., & Rudianto, B. (2019). Dimensi metrik dari graf hasil kali Kartesius antara dua lintasan (Pn x Pm) korona graf lengkap K1. *Jurnal Matematika UNAND*, 4(4), 28-33.

Soleha, M. S., Usadh, I. G. N. R., & Jamil, A. (2017). Enumerasi graf sederhana dengan enam simpul menggunakan teorema Polya. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, *14*(1), 37-44.

Utomo, T., & Dewi, N. R. (2018). Dimensi metrik graf amal (nKm). *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, *15*(1), 71-77.