Jurnal EurekaMatika, Vol. 9, No. 1, 2021
Journal homepage: https://ejournal.upi.edu/index.php/JEM
e-ISSN: 2528-4231, p-ISSN: 2776-480X

Hubungan Antara Aljabar-C^* $\mathcal{A}$ Yang Berkaitan Dengan Kata-Kata Tak Berdekorasi W Pada Graf-K

Muhammad Nur Hidayat T*, Rizky Rosjanuardi dan Sumanang Muhtar Gozali

Departemen Pendidikan Matematika
Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Pendidikan Indonesia
*Surel: dayataufiq@student.upi.edu

ABSTRAK. Artikel ini membahas hubungan antara aljabar-C^* yang berkaitan $\mathcal{A}$ dengan koleksi kata-kata tak berdekorasi W. Koleksi kata-kata tak berdekorasi W dipandang sebagai representasi-$*$ dari W. Selanjutnya dibahas juga mengenai aljabar-C^* yang berkaitan $\mathcal{A}$ yang dibangun oleh $\{s_{\lambda,s(\lambda)}\}$ dan dipandang sebagai representasi -$*$ dari $\mathcal{A}$, serta dikonstruksi suatu pemetaan $s_\lambda \mapsto s_{\lambda,s(\lambda)}$ yang bersifat isomorfisma.

Kata kunci: aljabar-C^*, kata-kata, tak berdekorasi, representasi-$*$.

Relation of Associated C^*-Algebra $\mathcal{A}$ With a Collection of Undecorated Words W in Graf-k

ABSTRACT. *This article discusses the relation of associated C^*-algebra $\mathcal{A}$ with a collection of undecorated words W. Collection of the undecorated words W can be seen as $*$- representation of W. Furthermore, this article discusses associated C^*-algebra $\mathcal{A}$ generated by $\{s_{\lambda,s(\lambda)}\}$ and seen as $*$-representation of $\mathcal{A}$, also given a construction of mapping $s_\lambda \mapsto s_{\lambda,s(\lambda)}$ that satisfied isomorphism property.*

Keywords: *C^*-algebra, words, undecorated, $*$-representation.*

1. PENDAHULUAN

Robertson & Streger (1999) memperkenalkan konsep *Affine Buildings*, *Tiling System*, dan *Higher Rank Cuntz-Krieger Algebras*, yang di dalamnya membahas tentang koleksi kata-kata tak berdekorasi W, dan tentang aljabar C^* yang berkaitan $\mathcal{A}$, yaitu aljabar C^* tunggal yang dibangun oleh keluarga isometri parsial $s_{u,v}$, dengan u, v merupakan kata-kata berdimensi-r yang bersesuaian, serta memenuhi Definsi 2.1.1. Jika $r = 1$ maka $\mathcal{A}$ adalah aljabar Cuntz-Krieger.

Kumjian & Pask (2000) mengenalkan konsep *Higher rank graf-k* yang membahas tentang definisi graf-k, dan representasi-* (yang dinotasikan dengan $C^*(\Lambda)$) dari sebuah graf-k Λ. Selanjutnya, kata-kata tak berdekorasi W dapat dipandang sebagai graf-k yang dibangun oleh keluarga isometri parsial s_λ dengan $\lambda \in W$, sehingga W dapat memenuhi definisi representasi-* $C^*(W)$.

Karena $C^*(W)$ dan aljabar-C^* yang berkaitan $\mathcal{A}$ keduanya dibangun oleh keluarga isometri parsial, dengan tidak mengurangi keumuman, dikontruksi $\mathcal{A}$ sebagai aljabar-C^* yang dibangun oleh keluarga isometri parsial $s_{\lambda,s(\lambda)}$ dengan $\lambda \in W$, sehingga terdapat relasi diantara keduanya. Pada makalah ini akan digambarkan keterkaitan antara koleksi kata-kata tak berdekorasi W dengan aljabar-C^* yang berkaitan $\mathcal{A}$.

1.1 GRAF BERARAH

Definisi 1.1.1.

Sebuah graf bearah $E = (E^0, E^1, r, s)$ memuat dua himpunan terhitung yaitu E^0, E^1 dan fungsi-fungsi $r, s : E^1 \to E^0$. Elemen dari E^0 disebut verteks dan elemen dari E^1 disebut sisi. Untuk setiap sisi e, $s(e)$ adalah sumber dan $r(e)$ adalah hasil dari e. Jika $s(e) = v$ dan $r(e) = w$, maka dikatakan bahwa v memancarkan e dan w menerima e, atau e adalah sisi dari v ke w (Raerburn, 2005), (Rosjanuardi, 2017) & (Nurdiyanto, 2019) .

Misalkan E sebuah graf di mana setiap simpulnya menerima paling banyak berhingga buah sisi, maka graf E disebut baris-berhingga (*row finite*).

1.2 ALJABAR-C^* DARI GRAF BERARAH

Misal E adalah graf berarah baris berhingga dan $\mathcal{H}$ adalah ruang Hilbert. Dalam (Raerburn, 2005) dan (Batkunde & Persulessy, 2012) keluarga Cuntz-Krieger-E $\{S, P\}$ pada $\mathcal{H}$ didefinisikan sebagai himpunan $\{P_v : v \in E^0\}$ yang terdiri dari projeksi-projeksi ortogonal pada $\mathcal{H}$ dan himpunan $S_e : e \in E^1$ yang terdiri dari isometri-isometri parsial pada $\mathcal{H}$

sedemikian sehingga:

1 (CK-1) $S_e^* S_e = P_{s(e)}$ untuk semua $e \in E^1$, dan

2 (CK-2) $P_v = \Sigma_{\{e\in E1:r(e)=v\}} S_e S_e^*$ asalkan v bukan sebuah *source*.

Kondisi (CK-1) dan (CK-2) disebut relasi-relasi Cuntz-Krieger, dan kondisi (CK-2) secara khusus disebut relasi Cuntz-Krieger pada v.

Misalkan $\{S, P\}$ adalah sebuah keluarga Cuntz-Krieger. Aljabar $C^*(S, P)$ adalah sebuah aljabar-C^* yang dibangun oleh keluarga $\{S, P\}$.

2. METODOLOGI

2.1. KATA-KATA TAK BERDEKORASI

Misal $\mathbb{Z}_+$ adalah himpunan bilangan bulat nonnegatif. Misalkan pula $[m, n]$ adalah $\{m, m+1, \ldots, n\}$, di mana $m \leq n$ untuk $m, n \in \mathbb{Z}$. Jika $m, n \in \mathbb{Z}^r$, $m_j \leq n_j$ katakan bahwa $m \leq n$ untuk $1 \leq j \leq r$, dan ketika $m \leq n$, definisikan $[m, n] = [m_1, n_1] \times \ldots \times [m_r, n_r]$. Pada $\mathbb{Z}^r$, 0 mendefiniskan vektor nol, dan e_j mendefinisikan unit vektor basis standar. Ditentukan himpunan berhingga $\mathcal{A}$ (sebuah "alphabet").

Matriks $\{0, 1\}$ adalah matriks dengan elemen-elemennya $\{0, 1\}$. Pilih matriks $\{0,1\} M_1, M_2, \ldots, M_r$ dan notasikan masing-masing elemennya dengan $M_j(b, a) \in \{0, 1\}$ untuk $a, b \in A$. Jika $m, n \in \mathbb{Z}^r$ dengan $m \leq n$, maka

$W[m, n] = \{w : [m, n] \rightarrow A;\ M_j(w(l + e_j), w(l)) = 1$, di mana $l, l + e_j \in [m, n]\}$

jika $m \geq 0$, notasikan $W_m = W_{[0,m]}$. Elemen $w \in W_m$ dikatakan mempunyai bentuk m dan tulis $\sigma(w) = m$. Sehingga W_m adalah himpunan kata yang berbentuk m. Didefinisikan pemetaan sumber dan pemetaan hasil $o : Wm \rightarrow A$ dan $t : Wm \rightarrow A$ dengan $o(w) = w(0)$ dan $t(w) = w(m)$. Tentukan himpunan yang berhingga D di mana elemennya merupakan "dekorasi", dan pemetaan $\delta : D \rightarrow A$. Misal $W = \bigcup W_m$ dan $\overline{W} = \bigcup \overline{W_m}$ adalah himpunan semua kata tak berdekorasi dan himpunan semua kata berdekorasi, defisinikan $o : \overline{W_m} \rightarrow D$ dan $t : \overline{W_m} \rightarrow A$ dengan $o(d, w) = d$ dan $t(d, w) = t(w)$.

Selanjutnya, diberikan $j \leq k \leq l \leq m$ dan fungsi $w : [j, m] \rightarrow A$, definisikan $w|_{[k,l]} \in W_{l-k}$ dengan $w|_{[k,l]} = w'$ di mana $w'(i) = w(i + k)$ untuk $0 \leq i \leq l - k$ jika $\overline{w} = (d, w) \in \overline{W}_m$, definisikan jika $k \neq 0$ maka $\overline{w}|_{[k,l]} = w|_{[k,l]}$ dan $\overline{w}\ |_{[0,l]} = (d, w\ |_{[0,l]})$

jika $w \in W_l$ dan $k \in \mathbb{Z}^r$, definisikan, $\tau_k w : [k, k + l] \rightarrow A$ dengan $(\tau_k w)(k + j) = w(j)$. Jika $w \in W_l$ di mana $l \geq 0$ dan jika $p \neq 0$ dikatakan bahwa w adalah $p-$*periodic* dengan w adalah p-translate $\tau_p w$ sehingga memenuhi $\tau_p w\ |_{[0,l]\cap[p,p+l]} = w|_{[0,l]\cap[p,p+l]}$.

Asumsikan bahwa matriks M_i telah dipilih sehingga memenuhi semua kondisi. maka :

H(1) Setiap M_i adalah matriks {0,1} yang bukan matriks 0

H(2) Misal $u \in W_m$ dan $v \in W_n$. Jika $t(u) = o(v)$ maka terdapat secara tunggal $w \in W_{m+n}$ sedemikian sehingga $w \mid [0, m] = u$ dan $w \mid [m, m + n] = v$

H(3) Perhatikan graf berarah yang mempunyai simpul untuk setiap $a \in A$ dan sisi berarah dari a ke b, sedemikian sehingga $M_i(b, a) = 1$, untuk setiap-i. Graf ini disebut *irreducible*,

H(4) Misal $p \in \mathbb{Z}^r$, $p \neq 0$. Terdapat $w \in W$ di mana bukan p-periodik.

Definisi 2.1.1.

Pada situasi H(2) w dapat dinyatakan sebagai $w = uv$, juga mengatakan bahwa produk uv ada. Produk uv merupakan produk asosiatif (Robertson & Steger, 1999).

2.2. KATEGORI

Dalam (Hungerford, 2000), kategori didefinisikan sebagai kelas C dari objek (dinotasikan dengan A, B, C, ...) bersama dengan:

1) Kelas dari himpunan-himpunan disjoin, dinotasikan $hom(A, B)$, satu untuk setiap pasangan dari objek-objek di C (sebuah elemen dari $hom(A, B)$ disebut morfisma dari A ke B dan dinotasikan dengan $f : A \rightarrow B$).
2) Untuk setiap 3 (A, B, C) dari objek-objek C fungsi

$$hom(B, C) \times hom(A, B) \rightarrow hom(A, C);$$

(untuk morfisma $g : B \rightarrow C$ dan $f : A \rightarrow B$, fungsi ini ditulis $(g, f) \mapsto g \circ f\ dan\ g \circ f : A \rightarrow C$ disebut komposisi dari *f* dan *g*).

Semua subjek memenuhi dua aksioma :

I. Asosiatif, jika $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, $h : C \rightarrow D$ adalah morfisma dari C, maka $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$,

II. Identitas, untuk setiap objek B dari C, terdapat morfisma $1_B : B \rightarrow B$

sedemikian sehingga untuk setiap $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, berlaku:

$$1_B \circ f = f \text{ dan } 1_B \circ g = g.$$

Sebuah kategori C dikatakan kategori kecil (*small category*) jika objek C dan homomorfisma C adalah himpunan dan bukan kelas.

2.3. GRAF-*K*

Definisi 2.3.1.

Graf-k (Λ, d) adalah kategori kecil Λ (dengan pemetaaan range dan *source*, r dan s secara berurutan) bersama dengan fungtor $d : \Lambda \to N^k$ sehingga memenuhi sifat faktorisasi: untuk setiap $\lambda \in \Lambda$ dan $m, n \in N^k$ dengan $d(\lambda) = m + n$, terdapat elemen tunggal $\mu, \nu \in \Lambda$ sedemikian sehingga $\lambda = \mu\nu$ dan $d(\mu) = m$, $d(\nu) = n$. Untuk $n \in N^k$, tulis $\Lambda^n := d^{-1}(n)$. Morfisma antara graf-k (Λ_1, d_1) dan (Λ_2, d_2) adalah fungtor $f : \Lambda_1 \to \Lambda_2$ bersesuaian dengan derajat pemetaan (Kumjian & Pask, 2000), (Rosjanuardi, 2017).

Definisi 2.3.2.

Graf-k Λ adalah baris berhingga jika untuk setiap $m \in N^k$ dan $v \in \Lambda^0$ himpunan $\Lambda^m(v) := \{\lambda \in \Lambda^m : r(\lambda) = v\}$ berhingga. Dengan kata lain, Λ tidak mempunyai sumber jika $\Lambda^m(v) \neq \emptyset$ untuk setiap $v \in \Lambda^0$ dan $m \in N^k$(Kumjian & Pask, 2000), (Rosjanuardi, 2017).

Definisi 2.3.3.

Misal Λ adalah graf-k dengan $0 < \Lambda^n(v) < \infty$, $C^*(\Lambda)$ didefinisikan sebagai aljabar-C^* universal yang dibangun oleh keluarga $\{s_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ dari isometri pasrsial, sehingga memenuhi:

1) $\{s_v : v \in \Lambda^0\}$ adalah keluarga dari proyeksi yang saling ortogonal.
2) $s_{\lambda\mu} = s_\lambda s_\mu$ untuk setiap $\lambda, \mu \in \Lambda$ sedemikian sehingga $s(\lambda) = r(\mu)$,
3) $s_\lambda^* s_\lambda = s_{s(\lambda)}$ untuk setiap $\lambda \in \Lambda$,
4) untuk setiap $v \in \Lambda^0$ dan $n \in N^k$ terdapat $s_v = \Sigma_{\lambda \in \Lambda^n(v)} s_\lambda s_\lambda^*$.

keluarga isometri-isometri parsial yang memenuhi 1) - 4) disebut representasi-* dari Λ (Kumjian & Pask, 2000)

Catatan 2.3.4.

Jika $\{t_\lambda\}$ adalah representasi-$*$ dari Λ maka pemetaan $s_\lambda \to t_\lambda$ mendefinisikan homomorfisma-$*$ dari $C^*(\Lambda)$ ke $C^*(\{t_\lambda : \lambda \in \Lambda\})$.

2.4. ALJABAR-C^* $\mathcal{A}$

Asumsikan kondisi H(1)-H(4) terpenuhi. Dalam (Robertson & Steger, 1999) didefinisikan aljabar abstrak yang bukan topologi $\mathcal{A}_0$ atas (C) yang bergantung pada A, $\left(M_j\right)_{j=1}^{r}$, D, dan δ. Pembangkit dari $\mathcal{A}_0$ adalah $\{s_{u,v}^0; u, v \in \overline{W}$ dan $t(u) = t(v)\}$. Relasi yang mendefinisikan $\mathcal{A}_0$ adalah

$$s_{u,v}^0 s_{v,w}^0 = s_{u,w}^0$$

$$s_{u,v}^0 = \Sigma_{w \in W; \sigma(w)=e_j,\, o(w)=t(u)=t(v)} s_{uv,vw}^0 \text{ untuk } 1 \leq j \leq r$$

$$s_{u,v}^0 s_{v,w}^0 = 0 \text{ untuk } u, v \in \overline{W}_0,\ u \neq v$$

Dapat dibuktikan bahwa $\mathcal{A}_0$ mempunyai antilinier antiautomorfisma yang didefinisikan oleh pembangkitnya dengan

$$[] {s_{u,v}^0}^* = s_{u,v}^0$$

Hal ini membuat $\mathcal{A}_0$ menjadi sebuah aljabar-$*$. Misal $\mathcal{A}$ merupakan aljabar-C^* yang membungkus $\mathcal{A}_0$ dan misal $s_{u,v}$ adalah *image* dari $s_{u,v}^0$ di $\mathcal{A}$. Pembangkit dari $\mathcal{A}$ adalah $\{s_{u,v}; u, v \in \overline{W}$dan $t(u) = t(v)\}$, dan relasi yang mendefinisikannya adalah

$$s_{u,v}^* = s_{u,v}$$

$$s_{u,v} s_{v,w} = s_{u,w}$$

$$s_{u,v} = \Sigma_{w \in W; \sigma(w)=e_j,\, o(w)=t(u)=t(v)} s_{uw,vw}, \text{ untuk } 1 \leq j \leq r$$

$$s_{u,v} s_{v,w} \text{ untuk } u, v \in \overline{W}, u \neq v.$$

Catatan 2.4.1.

Misal $u, v \in W$ dan $t(u) = t(v)$, maka $s_{u,v}$ adalah isometri parsial dengan proyeksi awal $s_{u,v}^* s_{u,v} = s_{v,v}$ dan proyeksi akhir $s_{u,v} s_{u,v}^* = s_{u,u}$

Lema 2.4.2.

Misal $u, v \in \overline{W}$ dengan $t(u) = t(v)$, dan pilih $m \in \mathbb{Z}_+^r$, maka

$$s_{u,v} = \Sigma_{w \in W; \sigma(w)=m,\, o(w)=t(u)=t(v)} s_{uw,\, vw}$$

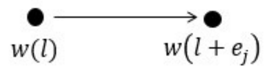
3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. GRAF-K

W dapat dipandang sebagai graf-k menurut definisinya. (W, d), dengan W adalah kategori kecil bersama dengan fungtor $d : W \to N^k$ yang meme- nuhi sifat faktorisasi yaitu : untuk sembarang $w \in Wp \subset W$ dan $m, n \in N^k$ dengan $d(w) = \sigma(w)$ maka terdapat $\mu \in Wm \subset W$, $\nu \in Wn \subset W$ sedemikian sehingga w = μν dan $d(\mu) = m$, $d(\nu) = n$.

Perhatikan bahwa, W_m mengakibatkan $M_j\,(w(l + ej), w(l)) = 1$. Perhatikan juga bahwa $w(l + e_j\,)$ hanya menerima sisi dari $w(l)$, akibatnya W adalah graf *irreducible* dan karena $w(l + e_j\,)$ menerima berhingga sisi dari $w(l)$, mengakibatkan setiap titik di W menerima berhingga sisi, berdasarkan definisi dari graf-k baris berhingga, maka W merupakan graf-k baris berhingga.

Perhatikan bahwa W adalah graf berarah dengan pemetaan awal $o : W \to A$ dengan $o(w) = w(0)$ dan pemetaan akhir $t : W \to A$ dengan $t(w) = w(m)$. Karena W adalah graf *irreducible* maka W dapat dipandang sebagai



Karena himpunan simpul direpresentasikan oleh proyeksi ortogonal murni dan himpunan sisi direpresentasikan oleh isometri parsial, maka $\{S\lambda : \lambda \in W\}$ adalah keluarga isometri parsial dan memenuhi:

1 jelas bahwa $\{S_v : v \in W\}$ adalah proyeksi yang saling ortogonal.
2 Untuk semua $\lambda, \mu \in W$ berlaku $s_{\lambda\mu} = s_\lambda s_\mu$ sedemikian sehingga $s(\lambda) = r(\mu)$
3 Untuk semua $\lambda \in W$ berlaku $s_\lambda^* s_\lambda = s_{s(\lambda)}$
4 Untuk semua $v \in W_0$ dan $m \in N^k$ berlaku $s_v = \Sigma_{\lambda \in W_m(v)} s_\lambda s_\lambda^*$ sehingga W memenuhi definisi representasi-$*$

3.2. REPRESENTASI-$*$ DARI ALJABAR-$C^*\mathcal{A}$

Dari pembahasan di atas, kita mengetahui bahwa W adalah sebuah graf-k. Berdasarkan Catatan 2.4.1., maka $s_{\lambda,s(\lambda)}$ adalah keluarga isometri parsial dan memenuhi:

1 $\{s_{v,s(v)} : v \in W_0\}$ adalah keluarga proyeksi yang saling ortogonal,
2 jika $s(\lambda) = r(\mu)$. Menurut aplikasi Lema 2.4.2., diperoleh

$$s_{\lambda,s(\lambda)} s_{\mu,s(\mu)} = \Sigma_{W^{d(\mu)}(s(\lambda))} s_{\lambda\mu,\,v} s_{\mu,s(\mu)} = s_{\lambda\mu,\mu} s_{\mu,s(\mu)} = s_{\lambda\mu,\,s(\lambda\mu)}$$

3 Untuk semua $u = v \in W_0$ dan $n \in N^k$, maka

$$s_{u,v} = \Sigma_{w \in W,\, \sigma(w)=m,\, o(w)=t(w)=t(v)} s_{uu',\,vu'} = \Sigma s_{uu',uu'} = \Sigma s_{w,w} = \Sigma s_{w,w'} s_{w,w'}^* \text{ dengan } uu' = ws$$

sehingga $\mathcal{A}$ memenuhi definisi representasi-$*$.

3.3. HUBUNGAN ANTARA $C^*(W)$ DAN $\mathcal{A}$

Berdasarkan Catatan 2.3.4., terdapat pemetaan homomorfisma-$*$ $\pi : C^*(W) \to A$ dengan $s_\lambda \longmapsto s_{\lambda,s(\lambda)}$.

1 Akan dibuktikan π injektif. Ambil sembarang $s_\lambda s_v \in C^*(W)$ dengan $\pi(s_\lambda) = \pi(s_v)$ perhatikan bahwa $\pi(s_\lambda) = s_{\lambda,s(\lambda)} \Leftrightarrow s\lambda, s(\lambda) = s_{v,s(v)} \Leftrightarrow s_\lambda = s_v$, sehingga didapat $s_\lambda = s_v$. Akibatnya, π satu-satu.

2 Akan dibuktikan π surjektif. Ambil sembarang $s_{\lambda,s(\lambda)} \in A$, Perhatikan bahwa,$S_{\lambda,s(\lambda)} = \pi(s_\lambda)$, maka terdapat $s_\lambda \in C^*(W)$ sedemikian sehingga memenuhi $\pi(s_\lambda) = s_{\lambda,s(\lambda)}$. Dengan demikian, π surjektif .

3 Akan dibuktikan π homomorfisma. Ambil sembarang $s_\lambda, s_v \in C^*(W)$, maka $\pi(s_\lambda s_v) = \pi(s_{\lambda v}) = s_{\lambda v, s(\lambda v)}$

Berdasarkan (ii) pada pasal 3.2, diperoleh

$$s_{\lambda v,s(\lambda v)} = s_{\lambda,s(\lambda)} s_{v,s(v)} = \pi(s_\lambda)\pi(s_v),$$

sehingga π sebuah homomorfisma.

Karena π adalah injektif, surjektif, dan homomorfisma, maka π merupakan isomorfisma, sehingga $\mathcal{A} \cong C^*(W)$.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan dalam penelitian ini, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1 Kata-kata tak berdekorasi W dapat dipandang sebagai sebuah kategori dengan syarat- syarat tertentu seperti yang telah dijabarkan pada bab pembahasan.

2 W dapat dipandang sebagai graf-k baris berhingga, dan merupakan sebuah representasi-$*$.

3 Aljabar- C^* yang bersesuaian $\mathcal{A}$ adalah sebuahrepresentasi-$*$.

4 Pemetaan $s_\lambda \mapsto s_{\lambda,s(\lambda)}$ adalah homomorfisma-$*$ dari $C^*(W)$ ke $C^*(\{s_{\lambda,s(\lambda)} : \lambda \in W\}$

5 $C^*(W) \cong \mathcal{A}$

5. DAFTAR PUSTAKA

Batkunde, H., & Persulessy, E. R. (2012). Aljabar-c* dan Sifatnya. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, *6*(1), 19-22.

Hungerford, T. W. (2000). *Algebra* (Graduate Texts in Mathematics # 73). Springer. USA.

Kumjian, A., & Pask. D. (2000). *Higher Rank Graph C*-Algebras*. New York Journal of Mathematics. Vol. 6, pp. 1-20

Nurdiyanto, T., & Susanti, E. (2019). Spanning-tree pada graf berarah dengan matriks in-degree. *Jurnal Edukasi Dan Sains Matematika (JES-MAT)*, *5*(1), 1-15.

Raerburn, I. (2005). *Graph Algebras*. American Mathematical Society.

Robertson, G., & Steger, T. (1999). *Affine Buildings, Tiling System and Higher Rank Cuntz-Krieger Algebras*. J. Reine Angew. Math. 513, pp.115-144

Rosjanuardi, R. (2017). *Aljabar Kumjian-Pask dari Graf-k Baris Berhingga dan Perluasannya* (Cetakan Pertama). Bandung: Alqaprint Jatinangor.