Sifat Inklusi Dan Perumuman Ketaksamaan Hölder Pada Ruang Barisan Orlicz

Pradipta Swiantana Prayoga*, Al Azhary Masta dan Siti Fatimah

Departemen Pendidikan Matematika
Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Pendidikan Indonesia
*Surel: pradiptaenix@gmail.com

ABSTRAK. Ruang Orlicz adalah perumuman dari ruang Lebesgue yang dikenalkan oleh Z. W. Birnbaum dan W. Orlicz pada tahun 1931. Terdapat dua versi ruang Orlicz, yaitu ruang Orlicz kontinu dan ruang barisan Orlicz. Topik utama penelitian ini adalah mengenai beberapa sifat pada ruang barisan Orlicz. Pada penelitian ini, penulis memperlihatkan syarat cukup dan perlu sifat inklusi dan keberlakuan ketaksamaan Hölder pada ruang barisan Orlicz. Lebih jauh lagi, penulis memperoleh syarat cukup dan perlu perumuman ketaksamaan Hölder pada ruang barisan Orlicz. Salah satu cara yang digunakan untuk membuktikan hal tersebut adalah dengan menggunakan norma dari barisan karakteristik pada $\mathbb{Z}$.

Kata Kunci: ruang Orlicz, ruang barisan Orlicz, sifat inklusi, ketaksamaan Hölder.

Inclusion Properties and Generalization of Hölder's Inequality in Orlicz Sequence Spaces

ABSTRACT. *Orlicz spaces are generalization of the Lebesgue spaces which was introduced by Z. W. Birnbaum and W. Orlicz in 1931. There are two versions of Orlicz spaces, namely continuous Orlicz spaces and Orlicz sequence spaces. The main topic of this study was about Orlicz sequence spaces. In this study, the author showed the sufficient and necessary conditions for inclusion properties and Hölder's inequality in Orlicz sequence spaces. Furthermore, the author obtained the sufficient and necessary conditions for generalization of Hölder's inequality in Orlicz sequence spaces. One of the keys to prove these results was by using the norm of the characteristic sequence in $\mathbb{Z}$.*

Keywords: *Orlicz spaces, Orlicz sequence spaces, inclusion properties, Hölder's inequality.*

e-ISSN: 2528-4231
p-ISSN: 2776-480X

1. PENDAHULUAN

Ruang Orlicz L_Φ pertama kali dikenalkan oleh Z. W. Birnbaum dan W. Orlicz pada tahun 1931 sebagai perumuman dari ruang Lebesgue L_p untuk $1 \leq p < \infty$ [1]. Terdapat dua versi ruang Orlicz yang berbeda, yaitu ruang Orlicz kontinu dan ruang barisan Orlicz [2]. Adapun pembahasan mengenai ruang Orlicz kontinu di antaranya telah banyak dibahas oleh M. A. Krasnoselskii dan Y. B. Rutickii pada tahun 1961 [3].

Adapun ruang barisan Orlicz yang merupakan perumuman dari ruang barisan *summable-p* ℓ_p, untuk $1 \leq p < \infty$, pertama kali dikenalkan oleh J. Lindenstrass dan L. Tzafriri pada tahun 1971 [4]. Selanjutnya, penulisan ruang Orlicz kontinu pada penelitian ini cukup ditulis dengan ruang Orlicz. Kemudian akan dikenalkan definisi dari fungsi Young, ruang Orlicz, dan ruang barisan Orlicz yang digunakan pada penelitian ini.

Definisi 1. Fungsi Young [5].
Suatu fungsi $\boldsymbol{\Phi}: [\mathbf{0}, \infty) \to [\mathbf{0}, \infty)$ dikatakan fungsi Young jika $\boldsymbol{\Phi}$ adalah fungsi konveks, kontinu kiri, $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, dan $\lim\limits_{t \to \infty} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{t}) = \infty$.

Selanjutnya, definisi dari ruang Orlicz diberikan sebagai berikut.

Definisi 2. Ruang Orlicz [6]
Misalkan $\boldsymbol{\Phi}$ adalah fungsi Young. Ruang Orlicz $\boldsymbol{L_\Phi}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$ adalah himpunan semua fungsi terukur $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\alpha|f(x)|)\, dx < \infty$$

untuk suatu $\alpha > 0$. Selanjutnya, ruang Orlicz $L_\Phi(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang Banach yang dilengkapi dengan norma

$$\|f\|_{L_\Phi(\mathbb{R}^n)} \coloneqq \inf\left\{b > 0: \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{b}\right) dx \leq 1\right\} < \infty.$$

Perhatikan bahwa pada fungsi Young $\Phi(t) \coloneqq t^p$ dengan $1 \leq p < \infty$, memperlihatkan bahwa ruang Orlicz $L_\Phi(\mathbb{R}^n)$ merupakan perumuman dari ruang Lebesgue $L_p(\mathbb{R}^n)$. Selanjutnya, diberikan definisi dari ruang basian Orlicz sebagai berikut.

Definisi 3. [7] Misalkan $\boldsymbol{\Phi}$ adalah fungsi Young. Ruang barisan Orlicz $\boldsymbol{\ell_\Phi}(\mathbb{Z})$ adalah himpunan semua barisan $\boldsymbol{X} \coloneqq (\boldsymbol{x_k}): \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|x_k|}{\alpha}\right) < \infty$$

untuk suatu $\alpha > 0$. Selanjutnya, ruang barisan Orlicz $\ell_\Phi(\mathbb{Z})$ adalah ruang Banach yang dilengkapi dengan norma

$$\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} \coloneqq \inf\left\{b > 0: \sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|x_k|}{b}\right) \leq 1\right\} < \infty.$$

Perhatikan bahwa pada fungsi Young $\Phi(t) \coloneqq t^p$ dengan $1 \leq p < \infty$, memperlihatkan bahwa ruang barisan Orlicz $\ell_\Phi(\mathbb{Z})$ merupakan perumuman dari ruang Lebesgue $L_p(\mathbb{Z})$. Selanjutnya, diberikan definisi sebagai berikut.

Definisi 4. [8] Misalkan $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}$, $\boldsymbol{N} \in \boldsymbol{\omega} \coloneqq \mathbb{N} \cup \{\boldsymbol{0}\}$. Definisikan

$$S_{m,N} \coloneqq \{m - N, \dots, m, \dots, m + N\}.$$

Notasi $|S_{m,N}| = 2N + 1$ merupakan kardinalitas dari $S_{m,N}$. Selanjutnya, sifat-sifat pada ruang Orlicz dibahas oleh Maligranda pada tahun 1989, khususnya mengenai syarat cukup dan perlu sifat inklusi pada ruang Orlicz [9]. Kemudian pada tahun 2018, Masta [10] membuktikan hal yang sama namun dengan menggunakan cara yang berbeda dari yang telah dilakukan oleh Maligranda. Pembahasan mengenai sifat-sifat pada ruang Orlicz dan ruang barisan Orlicz dapat dilihat pada [2 - 4, 8, 9, 11- 19].

Penelitian ketaksamaan Hölder pada ruang Orlicz dibahas antara lain oleh O'Neil dengan memberikan syarat cukup dan perlu ketaksamaan Hölder pada Orlicz [16]. Kemudian pada tahun 2018, Ifronika dkk. [20] memberikan syarat cukup dan perlu perumuman ketaksamaan Hölder pada ruang Orlicz.

Banyaknya hasil yang telah diperoleh mengenai sifat inklusi dan ketaksamaan Hölder pada ruang Orlicz menjadi motivasi bagi penulis untuk meneliti sifat inklusi dan perumuman ketaksamaan Hölder pada ruang barisan Orlicz.

2. METODOLOGI

Metodologi yang digunakan dalam penelitian ini adalah dengan menggunakan sifat dari fungsi Young, norma Luxemburg, dan norma barisan karakteristik pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ untuk memperoleh sifat inklusi dan ketaksamaan Hölder pada ruang barisan Orlicz.

Selanjutnya, penulis memberikan beberapa lema yang akan dimanfaatkan pada pembahasan selanjutnya.

Lema 5. [14] Jika $\boldsymbol{\Phi}: [\boldsymbol{0}, \infty) \to [\boldsymbol{0}, \infty)$ adalah fungsi Young, maka pernyataan berikut berlaku:

(1) $\Phi(\alpha t) \leq \alpha\Phi(t)$ *untuk sembarang* $0 < \alpha < 1$ *dan* $0 \leq t < \infty$.

(2) $\Phi(t)$ *monoton naik untuk sembarang* $0 \leq t < \infty$.

Lema 6. [14] Jika $\boldsymbol{\Phi}$ adalah fungsi Young dan $\boldsymbol{\Phi^{-1}(s) \coloneqq \inf\{r \geq 0: \Phi(r) > s\}}$, maka pernyataan berikut berlaku:

(1) $\Phi^{-1}(0) = 0$.

(2) $\Phi^{-1}(s_1) \leq \Phi^{-1}(s_2)$ *untuk sembarang* $s_1 \leq s_2$.
(3) $\Phi\left(\Phi^{-1}(s)\right) \leq s \leq \Phi^{-1}\left(\Phi(s)\right)$ *untuk sembarang* $0 \leq s < \infty$.

Lema 7. [10] Misalkan $\boldsymbol{\Phi_1}, \boldsymbol{\Phi_2}$ adalah fungsi Young dan $\boldsymbol{s > 0}$. Jika terdapat $\boldsymbol{C_1, C_2 > 0}$ dengan $\boldsymbol{\Phi_2^{-1}(s) \leq C_1\Phi_1^{-1}(C_2 s)}$, maka $\boldsymbol{\Phi_1\left(\frac{t}{C_1}\right) \leq C_2\Phi_2(t)}$ untuk $\boldsymbol{t = \Phi_2^{-1}(s)}$.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pembahasan mengenai syarat cukup dan perlu sifat inklusi pada ruang Orlicz dapat dilihat pada [11, 14]. Berdasarkan hasil yang telah diperoleh pada ruang Orlicz, selanjutnya akan diperiksa keberlakuan hasil tersebut pada ruang barisan Orlicz.

Lema 8. [17] Misalkan $\boldsymbol{\Phi}$ adalah fungsi Young dan $\boldsymbol{X \coloneqq (x_k) \in \ell_\Phi(\mathbb{Z})}$. Jika $\boldsymbol{0 < \|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} < \infty}$, maka $\boldsymbol{\sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|x_k|}{\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}}\right) \leq 1}$.

Bukti.

Ambil sembarang $X \coloneqq (x_k) \in \ell_\Phi(\mathbb{Z})$ sedemikian sehingga berlaku $0 < \|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} < \infty$ dan ambil sembarang $\varepsilon > 0$. Perhatikan bahwa karena $\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} + \varepsilon$ bukan batas bawah dari himpunan $A \coloneqq \left\{b > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|x_k|}{b}\right) \leq 1\right\}$, maka terdapat $b_1 \in A$ sedemikian sehingga $b_1 \leq \|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} + \varepsilon$. Jadi diperoleh

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|x_k|}{\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} + \varepsilon}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|x_k|}{b_1}\right) \leq 1.$$

Karena pertidaksamaan tersebut berlaku untuk sembarang $\varepsilon > 0$, maka dapat disimpulkan bahwa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|x_k|}{\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}}\right) \leq 1.$$

■

Lema 9. [17] Jika $\boldsymbol{\Phi}$ adalah fungsi Young dan $\boldsymbol{X \coloneqq (x_k) \in \ell_\Phi(\mathbb{Z})}$, maka pernyataan berikut ekuivalen:
(1) $\sum_{k=1}^{\infty} \Phi(|x_k|) \leq 1$.
(2) $\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} \leq 1$.

Bukti.

(1) $\Rightarrow$ (2) Asumsikan (1) berlaku, maka $\sum_{k=1}^{\infty} \Phi(|x_k|) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|x_k|}{1}\right) \leq 1$. Ini berarti $1 \in \left\{b > 0: \sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|x_k|}{b}\right) \leq 1\right\}$. Jadi diperoleh bahwa $\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} \leq 1$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Asumsikan (2) berlaku, maka diperoleh $\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} \leq 1$. Karena $|x_k|$ bernilai nonnegatif dan berdasarkan Lema 8., maka diperoleh

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi(|x_k|) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|x_k|}{\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}}\right) \leq 1.$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa $\sum_{k=1}^{\infty} \Phi(|x_k|) \leq 1$.

■

Lema 10. [17] Jika $\boldsymbol{\Phi}$ adalah fungsi Young dan $\boldsymbol{X} \coloneqq (\boldsymbol{x_k}) \in \boldsymbol{\ell_\Phi}(\mathbb{Z})$, maka pernyataan berikut ekuivalen:

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|x_k|}{\varepsilon}\right) \leq 1$ *untuk sembarang* $\epsilon > 0$.

(2) $\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} = 0$.

Bukti.

(1) $\Rightarrow$ (2) Asumsikan (1) berlaku, maka $\varepsilon \in \left\{b > 0: \sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|x_k|}{b}\right) \leq 1\right\}$ sehingga $0 \leq \|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} \leq \varepsilon$. Jadi dapat disimpulkan bahwa $\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Asumsikan (2) berlaku dan misalkan $A \coloneqq \left\{b > 0: \sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|x_k|}{b}\right) \leq 1\right\}$. Dengan menggunakan kontradiksi, asumsikan terdapat $\varepsilon_0 > 0$ sedemikian sehingga $\sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|x_k|}{\varepsilon_0}\right) > 1$. Ini berarti $\varepsilon_0 \notin A$. Selanjutnya, ambil sembarang $b_1 \in A$ sehingga $b_1 \neq \varepsilon_0$ dan $\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} \leq b_1$. Perhatikan dua kasus berikut.

Kasus 1: jika $b_1 < \varepsilon_0$, maka diperoleh $\frac{1}{\varepsilon_0} < \frac{1}{b_1}$. Selanjutnya, dapat diperoleh bahwa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|x_k|}{\varepsilon_0}\right) < \sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|x_k|}{b_1}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|x_k|}{b}\right) \leq 1.$$

Namun hal ini kontradiksi dengan pengandaian bahwa $\sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|x_k|}{\varepsilon_0}\right) > 1$.

Kasus 2: jika $b_1 > \varepsilon_0$, maka diperoleh $\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} \geq \varepsilon_0 > 0$. Dengan kata lain, $0 < \|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}$. Namun ini kontradiksi dengan fakta bahwa $\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} = 0$.

e-ISSN: 2528-4231
p-ISSN: 2776-480X

Dari Kasus 1 dan 2, maka diperoleh $\sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|x_k|}{\varepsilon}\right) \leq 1$ untuk sembarang $\varepsilon > 0$.

■

Lema 11. [17] Jika $\boldsymbol{\Phi}$ adalah fungsi Young dan $\boldsymbol{X} \coloneqq (\boldsymbol{x_k}) \in \boldsymbol{\ell_\Phi}(\mathbb{Z})$, maka pernyataan berikut ekuivalen:
(1) $\sum_{k=1}^{\infty} \Phi(\alpha|x_k|) = 0$ *untuk sembarang* $\alpha > 0$.
(2) $\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} = 0$.
Bukti.
(1) ⇒ (2) Asumsikan (1) berlaku. Perhatikan bahwa $\sum_{k=1}^{\infty} \Phi(\alpha|x_k|) = 0 < 1$ sehingga $\sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|x_k|}{\frac{1}{\alpha}}\right) < 1$. Ini berarti $\frac{1}{\alpha} \in \left\{b > 0: \sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|x_k|}{b}\right) \leq 1\right\}$. Jadi diperoleh $0 \leq \|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} \leq \frac{1}{\alpha}$ untuk sembarang $\alpha > 0$ sehingga $\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} = 0$.
(2) ⇒ (1) Asumsikan (2) berlaku. Berdasarkan Lema 5., untuk sembarang $0 < \varepsilon < 1$ dan $\alpha > 0$, maka berlaku

$$\Phi(\alpha|x_k|) = \Phi\left((1-\varepsilon)0 + \varepsilon\left(\frac{\alpha|x_k|}{\varepsilon}\right)\right) \leq \varepsilon\Phi\left(\frac{\alpha|x_k|}{\varepsilon}\right).$$

Akibatnya diperoleh

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi(\alpha|x_k|) \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{\alpha|x_k|}{\varepsilon}\right) \leq \varepsilon.$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa $\sum_{k=1}^{\infty} \Phi(\alpha|x_k|) = 0$ untuk sembarang $\alpha > 0$.

■

Lema 12. [17] Jika $\boldsymbol{\Phi}$ adalah fungsi Young dan $\boldsymbol{X} \coloneqq (\boldsymbol{x_k}) \in \boldsymbol{\ell_\Phi}(\mathbb{Z})$, maka pernyataan berikut ekuivalen:
(1) $\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} = 0$.
(2) $X = (0)$.
Bukti.
(1) ⇒ (2) Asumsikan (1) berlaku. Berdasarkan Lema 11., maka berlaku $\sum_{k=1}^{\infty} \Phi(\alpha|x_k|) = 0$ untuk sembarang $\alpha > 0$ sehingga $\Phi(\alpha|x_k|) = 0$. Perhatikan bahwa $\Phi(\alpha|x_k|) = 0$ ketika $\alpha|x_k| = 0$. Karena berlaku untuk sembarang $\alpha > 0$, maka $x_k = 0$. Jadi dapat disimpulkan bahwa $X = (0)$.
(2) ⇒ (1) Asumsikan (2) berlaku, maka $x_k = 0$. Ambil sembarang $\varepsilon > 0$ sehingga $\frac{|x_k|}{\varepsilon} = 0$. Jadi $\sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|x_k|}{\varepsilon}\right) = 0 < 1$. Perhatikan bahwa karena $\varepsilon \in \left\{b > 0: \sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|x_k|}{b}\right) \leq 1\right\}$, berdasarkan definisi dari $\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}$, maka

diperoleh bahwa $\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} \le \varepsilon$ sehingga dapat disimpulkan $\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} = 0$.

■

Teorema 13. [17] Misalkan $\boldsymbol{\Phi}$ fungsi Young. Pemetaan $\|\cdot\|_{\boldsymbol{\ell_\Phi}(\mathbb{Z})}$ mendefinisikan sebuah norma pada $\boldsymbol{\ell_\Phi}(\mathbb{Z})$.

Bukti.

Misalkan $X \coloneqq (x_k) \in \ell_\Phi(\mathbb{Z})$ dengan $k \in \mathbb{N}$. Selanjutnya, akan ditunjukkan pemetaan $\|\cdot\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}$ mendefinisikan sebuah norma pada $\ell_\Phi(\mathbb{Z})$.

i. Akan ditunjukkan $\|\cdot\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} \ge 0$.

Perhatikan bahwa karena $\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} = \inf\left\{b > 0: \sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|x_k|}{b}\right) \le 1\right\}$, berdasarkan definisi dari infimum, jadi diperoleh bahwa $\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} \ge 0$.

ii. Akan ditunjukkan $\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} = 0$ jika dan hanya jika $X = (0)$.

Berdasarkan Lema 12., maka $\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} = 0$ jika dan hanya jika $X = (0)$.

iii. Akan ditunjukkan $\|\alpha X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} = |\alpha|\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}$ untuk sembarang $\alpha \in \mathbb{R}$.

Perhatikan dua kasus berikut.

Kasus 1: untuk $\alpha \ne 0$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\|\alpha X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} &= \inf\left\{b > 0: \sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|\alpha x_k|}{b}\right) \le 1\right\} \\ &= \inf\left\{b > 0: \sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|x_k|}{\frac{b}{|\alpha|}}\right) \le 1\right\} \\ &= |\alpha| \inf\left\{c > 0: \sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|x_k|}{c}\right) \le 1\right\} \\ &= |\alpha|\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})},\end{aligned}$$

dengan $c = \frac{b}{|\alpha|}$.

Kasus 2: untuk $\alpha = 0$. Perhatikan bahwa

$$\|\alpha X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} = \|0X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} = 0 = 0\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} = \alpha\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}.$$

Dari Kasus 1 dan 2, diperoleh $\|\alpha X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} = |\alpha|\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}$ dengan $\alpha \in \mathbb{R}$.

iv. Akan ditunjukkan $\|X + Y\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} \le \|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} + \|Y\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}$ untuk sembarang $X, Y \in \ell_\Phi(\mathbb{Z})$ dengan $X \coloneqq (x_k), Y \coloneqq (Y_k)$ dan $k \in \mathbb{N}$.

Perhatikan bahwa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|x_k + y_k|}{\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} + \|Y\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}}\right)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|x_k| + |y_k|}{\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} + \|Y\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}}{\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} + \|Y\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}} \frac{|x_k|}{\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}} + \frac{\|Y\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}}{\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} + \|Y\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}} \frac{|y_k|}{\|Y\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}}\right)$$

$$\leq \frac{\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}}{\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} + \|Y\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}} \sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|x_k|}{\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}}\right) + \frac{\|Y\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}}{\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} + \|Y\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}} \sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|y_k|}{\|Y\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}}\right)$$

$$\leq \frac{\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}}{\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} + \|Y\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}} + \frac{\|Y\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}}{\|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} + \|Y\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}}$$

$$= 1.$$

Berdasarkan definisi dari $\|X + Y\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}$, maka dapat disimpulkan bahwa $\|X + Y\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} \leq \|X\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} + \|Y\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}$, untuk sembarang $X, Y \in \ell_\Phi(\mathbb{Z})$ dengan $X \coloneqq (x_k), Y \coloneqq (y_k)$ dan $k \in \mathbb{N}$.

Jadi pemetaan $\|\cdot\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}$ mendefinisikan sebuah norma pada $\ell_\Phi(\mathbb{Z})$.

■

Teorema 14. Ruang bernorma $\left(\boldsymbol{\ell_\Phi}(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_{\boldsymbol{\ell_\Phi}(\mathbb{Z})}\right)$ adalah ruang Banach.

Bukti.

Untuk membuktikan ruang barisan Orlicz adalah ruang Banach, cukup ditunjukkan bahwa $\ell_\Phi(\mathbb{Z})$ lengkap. Ambil sembarang (x_n) barisan Cauchy di $\ell_\Phi(\mathbb{Z})$. Artinya, untuk sembarang $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$\|x_n - x_m\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} < \varepsilon$$

untuk $n, m \geq n_0$. Perhatikan bahwa karena (x_n) adalah barisan Cauchy, maka terdapat suatu $(n_k) \in \mathbb{N}$ sehingga sub barisan $\left(x_{n_k}\right)$ memenuhi

$$\left\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} < \frac{1}{2^k} \leq 1$$

untuk $n \geq n_k$. Selanjutnya, definisikan fungsi

$$g_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \left|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right| < \infty \ldots (1)$$

Perhatikan bahwa (g_N) adalah barisan nonnegatif dan monoton naik. Selanjutnya akan diperiksa bahwa $g_N \in \ell_\Phi(\mathbb{Z})$. Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga, diperoleh

$$\|g_N\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} = \left\|\sum_{k=1}^{N}\left|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right|\right\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} \leq \sum_{k=1}^{N}\left\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} < \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2^k}$$
$$\leq 1.$$

Karena $\|g_N\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} \leq 1$, maka berdasarkan Lema 9. berlaku $\sum_{k=1}^{\infty}\Phi(|g_N|) = \sum_{k=1}^{\infty}\Phi\left(\frac{|g_N|}{1}\right) \leq 1 < \infty$ sehingga diperoleh $g_N \in \ell_\Phi(\mathbb{Z})$. Selanjutnya, misalkan $\lim_{N\to\infty} g_N = g$. Dengan cara yang serupa, perhatikan bahwa $g \in \ell_\Phi(\mathbb{Z})$ karena

$$\|g\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} = \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right|\right\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$$
$$= 1.$$

Di sisi lain, untuk suatu $b > 0$, definisikan

$$\Phi_N(x) \coloneqq \Phi\left(\frac{g_N(x)}{b}\right)$$

yang merupakan barisan tidak turun, karena Φ fungsi monoton naik dan (g_N) tidak turun. Perhatikan bahwa $\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_N(x) < \infty$ karena $g_N \in \ell_\Phi(\mathbb{Z})$. Berdasarkan Teorema Kekonvergenan Monoton, maka Φ_N konvergen hampir dimana-mana pada $\mathbb{Z}$. Selanjutnya misalkan $\lim_{N\to\infty}\Phi_N(x) = \Phi(x)$ sehingga berdasarkan kekontinuan dari Φ diperoleh

$$\lim_{N\to\infty}\Phi_N(x) = \lim_{N\to\infty}\Phi\left(\frac{g_N(x)}{b}\right) = \Phi\left(\lim_{N\to\infty}\frac{g_N(x)}{b}\right) = \Phi\left(\frac{g(x)}{b}\right).$$

Ini berarti $\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right|$ konvergen hampir dimana-mana pada $\mathbb{Z}$. Dengan kata lain, $\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right)$ konvergen hampir dimana-mana pada $\mathbb{Z}$. Di sisi lain, perhatikan bahwa jumlah parsial ke-N dari (1) adalah

$$\sum_{k=1}^{N}\left(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right) = x_{n_{N+1}} - x_{n_1}$$

sehingga $x_{n_{N+1}}$ konvergen hampir dimana-mana pada $\mathbb{Z}$. Selanjutnya, definisikan $\lim_{N\to\infty} x_{n_{N+1}} = x$. Untuk suatu i yang tetap, barisan $\left|x_{n_j} - x_{n_i}\right|$ memenuhi Lema Fatou, yaitu jika $\left|x_{n_j} - x_{n_i}\right| \geq 0$ dan $\left\|x_{n_j} - x_{n_i}\right\| < \frac{1}{2^i} < \infty$ untuk $j \geq i$, maka $\lim_{j\to\infty}\inf_j\left|x_{n_j} - x_{n_i}\right| = \left|x - x_{n_i}\right|$ hampir dimana-mana pada $\mathbb{Z}$. Jadi diperoleh $\left|x - x_{n_i}\right| \in \ell_\Phi(\mathbb{Z})$ sehingga $x - x_{n_i} \in \ell_\Phi(\mathbb{Z})$. Perhatikan bahwa

$$x = x - x_{n_i} + x_{n_i} \in \ell_\Phi(\mathbb{Z}).$$

Jadi $x \in \ell_\Phi(\mathbb{Z})$ karena $x - x_{n_i} \in \ell_\Phi(\mathbb{Z})$ dan $x_{n_i} \in \ell_\Phi(\mathbb{Z})$ berdasarkan asumsi. Selanjutnya, amati bahwa

$$\begin{aligned}\|x - x_n\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} &= \left\|\left(x - x_{n_i}\right) + \left(x_{n_i} - x_n\right)\right\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} \\ &\leq \left\|\left(x - x_{n_i}\right)\right\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} + \left\|\left(x_{n_i} - x_n\right)\right\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} \; untuk \; n_i > n \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Karena berlaku untuk sembarang $\varepsilon > 0$, jadi $x_n \to x$ sehingga terbukti bahwa $\ell_\Phi(\mathbb{Z})$ lengkap. Dengan kata lain, $\left(\ell_\Phi(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}\right)$ adalah ruang Banach.

■

Selanjutnya, akan dikenalkan norma barisan karakteristik pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ untuk memperoleh sifat inklusi pada ruang barisan Orlicz.

Lema 15. Misalkan $\boldsymbol{\Phi}$ adalah fungsi Young. Jika $\boldsymbol{\xi_k^{m_0,N_0}}$ adalah barisan karakteristik pada $\mathbb{Z}$ yang didefinisikan sebagai berikut

$$\xi_k^{m_0,N_0} := \begin{cases} 1, jika\ k \in S_{m_0,N_0} \\ 0, lainnya \end{cases}$$

untuk suatu $m_0 \in \mathbb{Z}$ dan $N_0 \in \omega$, maka

$$\|\xi^{m_0,N_0}\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} = \frac{1}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{2N_0 + 1}\right)}$$

untuk setiap $N_0 \in \omega$.

Bukti.

Ambil sembarang $N_0 \in \omega$. Misalkan $A := \left\{b > 0 : \Phi\left(\frac{1}{b}\right) \leq \frac{1}{(2N_0+1)}\right\}$ dan $B := \left\{r \geq 0 : \Phi(r) > \frac{1}{(2N_0+1)}\right\}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\|\xi^{m_0,N_0}\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} &:= \inf\left\{b > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{\left|\xi_k^{m_0,N_0}\right|}{b}\right) \leq 1\right\} \\ &= \inf\left\{b > 0 : (2N_0 + 1)\Phi\left(\frac{1}{b}\right) \leq 1\right\} \\ &= \inf\left\{b > 0 : \Phi\left(\frac{1}{b}\right) \leq \frac{1}{2N_0 + 1}\right\} \\ &= \inf A.\end{aligned}$$

Di sisi lain, perhatikan bahwa

$$\Phi^{-1}\left(\frac{1}{2N_0 + 1}\right) = \inf\left\{r \geq 0 : \Phi(r) > \frac{1}{2N_0 + 1}\right\} = \inf B.$$

Pilih $b = \frac{1}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{2N_0+1}\right)}$, berdasarkan

(3), diperoleh

$$\Phi\left(\frac{1}{b}\right) = \Phi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{1}{2N_0+1}\right)\right) \leq \frac{1}{2N_0+1}.$$

Berdasarkan definisi dari $\|\cdot\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}$, maka

$$\|\xi^{m_0,N_0}\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} \leq \frac{1}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{2N_0+1}\right)}.$$

Selanjutnya, asumsikan $\|\xi^{m_0,N_0}\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} < \frac{1}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{2N_0+1}\right)}$ sehingga $\Phi^{-1}\left(\frac{1}{2N_0+1}\right) < \frac{1}{\|\xi^{m_0,N_0}\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}}$. Berdasarkan definisi dari $\Phi^{-1}\left(\frac{1}{2N_0+1}\right)$, maka terdapat $r_1 \in B$ sedemikian sehingga berlaku

$$\Phi^{-1}\left(\frac{1}{2N_0+1}\right) < r_1 \leq \frac{1}{\|\xi^{m_0,N_0}\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}}.$$

Selanjutnya perhatikan bahwa karena $r_1 \in B$, maka $\frac{1}{r_1} \notin A$ sehingga diperoleh bahwa $\frac{1}{r_1} \leq \|\xi^{m_0,N_0}\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}$. Namun ini kontradiksi dengan fakta bahwa $r_1 \leq \frac{1}{\|\xi^{m_0,N_0}\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})}}$. Jadi asumsi bahwa $\|\xi^{m_0,N_0}\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} < \frac{1}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{2N_0+1}\right)}$ tidak mungkin, sehingga dapat disimpulkan bahwa

$$\|\xi^{m_0,N_0}\|_{\ell_\Phi} = \frac{1}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{2N_0+1}\right)}.$$

■

Selanjutnya adalah pembahasan mengenai sifat inklusi pada ruang barisan Orlicz untuk kasus konstanta C berada di dalam fungsi Φ_2 yang diberikan pada teorema berikut.

Teorema 16. Syarat Cukup Sifat Inklusi pada Ruang Barisan Orlicz [17]

Misalkan Φ_1, Φ_2 adalah fungsi Young dan C adalah suatu konstanta positif. Jika $\Phi_1(t) \leq \Phi_2(Ct)$ untuk sembarang $t > 0$, maka $\ell_{\Phi_2}(\mathbb{Z}) \subseteq \ell_{\Phi_1}(\mathbb{Z})$ dengan $\|X\|_{\ell_{\Phi_1}(\mathbb{Z})} \leq C\|X\|_{\ell_{\Phi_2}(\mathbb{Z})}$ untuk sembarang $X \coloneqq (x_k) \in \ell_{\Phi_2}(\mathbb{Z})$.

Bukti.

Misalkan $A_1 \coloneqq \left\{b > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_1\left(\frac{|x_k|}{b}\right) \leq 1\right\}$ dan $A_2 \coloneqq \left\{b > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_2\left(\frac{C|x_k|}{b}\right) \leq 1\right\}$. Karena $\Phi_1\left(\frac{|x_k|}{b}\right) \leq \Phi_2\left(\frac{C|x_k|}{b}\right)$, maka berlaku

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_1\left(\frac{|x_k|}{b}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_2\left(\frac{C|x_k|}{b}\right) \leq 1.$$

Karena $b \in A_2$ mengakibatkan $b \in A_1$, maka $A_2 \subseteq A_1$. Ini berarti $\inf A_1 \leq \inf A_2$ sehingga $\|X\|_{\ell_{\Phi_1}(\mathbb{Z})} \leq \|CX\|_{\ell_{\Phi_2}(\mathbb{Z})}$. Jadi dapat dapat disimpulkan bahwa $\ell_{\Phi_2}(\mathbb{Z}) \subseteq \ell_{\Phi_1}(\mathbb{Z})$ dengan $\|X\|_{\ell_{\Phi_1}(\mathbb{Z})} \leq \|CX\|_{\ell_{\Phi_2}(\mathbb{Z})} = C\|X\|_{\ell_{\Phi_2}(\mathbb{Z})}$.

■

Selanjutnya adalah pembahasan mengenai sifat inklusi pada ruang barisan Orlicz untuk kasus konstanta C berada di luar fungsi Φ_2 yang diberikan pada teorema berikut.

Teorema 17. Syarat Cukup Sifat Inklusi pada Ruang Barisan Orlicz [17]

Misalkan Φ_1, Φ_2 adalah fungsi Young dan C adalah suatu konstanta positif. Jika $\Phi_1(t) \leq C\Phi_2(t)$ untuk sembarang $t > 0$, maka $\ell_{\Phi_2}(\mathbb{Z}) \subseteq \ell_{\Phi_1}(\mathbb{Z})$ dengan $\|X\|_{\ell_{\Phi_1}(\mathbb{Z})} \leq \max\{1, C\} \|X\|_{\ell_{\Phi_2}(\mathbb{Z})}$ untuk sembarang $X := (x_k) \in \ell_{\Phi_2}(\mathbb{Z})$.

Bukti.

Misalkan $A_1 := \left\{b > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_1\left(\frac{|x_k|}{b}\right) \leq 1\right\}$ dan $A_2 := \left\{b > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_2\left(\frac{|x_k|}{b}\right) \leq 1\right\}$. Karena $\Phi_1\left(\frac{|x_k|}{b}\right) \leq C\Phi_2\left(\frac{|x_k|}{b}\right)$, maka berlaku

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_1\left(\frac{|x_k|}{b}\right) \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_2\left(\frac{|x_k|}{b}\right).$$

Selanjutnya perhatikan dua kasus berikut.

Kasus 1: untuk $0 < C \leq 1$. Perhatikan bahwa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_1\left(\frac{|x_k|}{b}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_2\left(\frac{|x_k|}{b}\right) \leq 1.$$

Karena $b \in A_2$ mengakibatkan $b \in A_1$, maka $A_2 \subseteq A_1$. Jadi $\inf A_1 \leq \inf A_2$ sehingga $\|X\|_{\ell_{\Phi_1}(\mathbb{Z})} \leq \|X\|_{\ell_{\Phi_2}(\mathbb{Z})}$.

Kasus 2: untuk $C > 1$. Perhatikan bahwa,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_1\left(\frac{\frac{1}{C}|x_k|}{b}\right) \leq \frac{1}{C}\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_1\left(\frac{|x_k|}{b}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_2\left(\frac{|x_k|}{b}\right) \leq 1.$$

Selanjutnya misalkan $A_3 := \left\{b > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_1\left(\frac{\frac{1}{C}|x_k|}{b}\right) \leq 1\right\}$. Karena $b \in A_2$ mengakibatkan $b \in A_3$, maka $A_2 \subseteq A_3$. Jadi $\inf A_3 \leq \inf A_2$ sehingga $\left\|\frac{1}{C}X\right\|_{\ell_{\Phi_1}(\mathbb{Z})} \leq \|X\|_{\ell_{\Phi_2}(\mathbb{Z})}$. Karena $C > 1$, maka $\frac{1}{C}\|X\|_{\ell_{\Phi_1}(\mathbb{Z})} \leq \|X\|_{\ell_{\Phi_2}(\mathbb{Z})}$.

Akibatnya diperoleh $\|X\|_{\ell_{\Phi_1}(\mathbb{Z})} \leq C\|X\|_{\ell_{\Phi_2}(\mathbb{Z})}$.

Berdasarkan Kasus 1 dan 2, dapat disimpulkan bahwa $\ell_{\Phi_2}(\mathbb{Z}) \subseteq \ell_{\Phi_1}(\mathbb{Z})$ dengan $\|X\|_{\ell_{\Phi_1}(\mathbb{Z})} \leq \max\{1, C\} \|X\|_{\ell_{\Phi_2}(\mathbb{Z})}$ untuk suatu konstanta $C > 0$.

■

Setelah mengetahui syarat cukup sifat inklusi pada ruang Orlicz, selanjutnya diberikan syarat perlu sifat inklusi pada ruang barisan Orlicz dalam teorema berikut.

Teorema 18. Syarat Perlu Sifat Inklusi pada Ruang Barisan Orlicz

Misalkan Φ_1, Φ_2 *adalah fungsi Young dan* C *adalah suatu konstanta positif. Jika* $\ell_{\Phi_2}(\mathbb{Z}) \subseteq \ell_{\Phi_1}(\mathbb{Z})$ *dengan* $\|X\|_{\ell_{\Phi_1}(\mathbb{Z})} \leq C\|X\|_{\ell_{\Phi_2}(\mathbb{Z})}$ *untuk sembarang* $X := (x_k) \in \ell_{\Phi_2}(\mathbb{Z})$, *maka* $\Phi_1(t) \leq \Phi_2(Ct)$ *untuk* $t = C\Phi_2^{-1}\left(\frac{1}{2N_0+1}\right)$ *dengan* $N_0 \in \omega$.

Bukti.

Misalkan C adalah suatu konstanta positif. Selanjutnya, pilih $X = \xi_k^{m_0,N_0}$, yaitu barisan karakteristik pada $\mathbb{Z}$ sehingga berlaku

$$\frac{1}{\Phi_1^{-1}\left(\frac{1}{2N_0+1}\right)} = \|\xi^{m_0,N_0}\|_{\ell_{\Phi_1}(\mathbb{Z})} \leq C\|\xi^{m_0,N_0}\|_{\ell_{\Phi_2}(\mathbb{Z})} = \frac{C}{\Phi_2^{-1}\left(\frac{1}{2N_0+1}\right)}.$$

Dengan kata lain,

$$\Phi_2^{-1}\left(\frac{1}{2N_0+1}\right) \leq C\Phi_1^{-1}\left(\frac{1}{2N_0+1}\right).$$

Misalkan $t_0 = \Phi_2^{-1}\left(\frac{1}{2N_0+1}\right)$. Berdasarkan Lema 7., maka berlaku

$$\Phi_1\left(\frac{t_0}{C}\right) \leq \Phi_2(t_0).$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa $\Phi_1(t) \leq \Phi_2(Ct)$, untuk $t = C\Phi_2^{-1}\left(\frac{1}{2N_0+1}\right)$.

■

Berdasarkan Teorema 16. dan Teorema 18., maka diperoleh akibat sebagai berikut.

Akibat 19. Jika $\boldsymbol{\Phi_1}, \boldsymbol{\Phi_2}$ fungsi Young dan $\boldsymbol{C}$ adalah suatu konstanta positif, maka pernyataan berikut ekuivalen:

(1) $\Phi_1(t) \leq \Phi_2(Ct)$ *untuk* $t = C\Phi_2^{-1}\left(\frac{1}{2N_0+1}\right)$ *dengan* $N_0 \in \omega$.

(2) $\ell_{\Phi_2}(\mathbb{Z}) \subseteq \ell_{\Phi_1}(\mathbb{Z})$ *dengan* $\|X\|_{\ell_{\Phi_1}(\mathbb{Z})} \leq C\|X\|_{\ell_{\Phi_2}(\mathbb{Z})}$ *untuk sembarang* $X := (x_k) \in \ell_{\Phi_2}(\mathbb{Z})$.

Setelah memperoleh syarat cukup dan perlu sifat inklusi pada ruang barisan Orlicz, selanjutnya penulis membahas ketaksamaan Hölder pada ruang barisan Orlicz.

Lema 20. Ketaksamaan Hölder pada Ruang Barisan Orlicz [20]

Misalkan Φ_1, Φ_2, dan Φ_3 adalah fungsi Young. Jika

$$\Phi_1^{-1}(t)\Phi_2^{-1}(t) \leq \Phi_3^{-1}(t)$$

untuk sembarang $t \geq 0$, maka $\|XY\|_{\ell_{\Phi_3}(\mathbb{Z})} \leq 2\|X\|_{\ell_{\Phi_1}(\mathbb{Z})}\|Y\|_{\ell_{\Phi_2}(\mathbb{Z})}$ untuk sembarang $X := (x_k) \in \ell_{\Phi_1}(\mathbb{Z})$, $Y := (y_k) \in \ell_{\Phi_2}(\mathbb{Z})$, dan $XY := (x_k y_k) \in \ell_{\Phi_3}(\mathbb{Z})$.

Lema 20. dapat dimanfaatkan untuk memperoleh sifat inklusi pada ruang barisan Orlicz, sebagaimana yang diberikan dalam akibat berikut.

Akibat 21. Misalkan $\mathbf{2N_0+1} \subset \mathbb{Z}$. Jika $\boldsymbol{\Phi_1}, \boldsymbol{\Phi_2}$ adalah fungsi Young dan terdapat fungsi Young $\boldsymbol{\Phi}$ sedemikian sehingga berlaku

$$\Phi_1^{-1}(t)\Phi^{-1}(t) \leq \Phi_2^{-1}(t)$$

untuk sembarang $t \geq 0$, maka $\ell_{\Phi_1}(2N_0+1) \subseteq \ell_{\Phi_2}(2N_0+1)$, dengan

$$\|X\|_{\ell_{\Phi_2}(2N_0+1)} \leq \frac{2}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{2N_0+1}\right)}\|X\|_{\ell_{\Phi_1}(2N_0+1)}$$

untuk sembarang $X := (x_k) \in \ell_{\Phi_1}(2N_0+1)$.

Bukti.

Ambil sembarang $X := (x_k) \in \ell_{\Phi_1}(2N_0+1)$. Dengan memanfaatkan Lema 15. dan Lema 20., pilih $Y := \xi_k^{m_0,N_0}$, yaitu barisan karakteristik pada $\mathbb{Z}$ sehingga

$$\begin{aligned}\|X\xi^{m_0,N_0}\|_{\ell_{\Phi_2}(2N_0+1)} &\leq 2\|\xi^{m_0,N_0}\|_{\ell_{\Phi}(2N_0+1)}\|X\|_{\ell_{\Phi_1}(2N_0+1)}\\ &= \frac{2}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{2N_0+1}\right)}\|X\|_{\ell_{\Phi_1}(2N_0+1)}.\end{aligned}$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa $\ell_{\Phi_1}(2N_0+1) \subseteq \ell_{\Phi_2}(2N_0+1)$.

■

Selanjutnya, syarat cukup ketaksamaan Hölder dapat diperumum pada ruang barisan Orlicz. Hal tersebut dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 22. Syarat Cukup Perumuman Ketaksamaan Hölder pada Ruang Barisan Orlicz [20]

Misalkan $m \geq 2$ dan Φ, Φ_i adalah fungsi Young dengan $i = 1, \dots, m$. Jika $\prod_{i=1}^{m} \Phi_i^{-1}(t) \leq \Phi^{-1}(t)$ untuk sembarang $t \geq 0$, maka

$$\left\|\prod_{i=1}^{m} X_i\right\|_{\ell_{\Phi}(\mathbb{Z})} \leq m\prod_{i=1}^{m}\|X_i\|_{\ell_{\Phi_i}(\mathbb{Z})},$$

untuk sembarang $X_i \in \ell_{\Phi_i}(\mathbb{Z})$ dengan $i = 1, \dots, m$ dan $\prod_{i=1}^{m} X_i \in \ell_{\Phi}(\mathbb{Z})$.

Setelah diperoleh syarat cukup perumuman ketaksamaan Hölder pada ruang barisan Orlicz, selanjutnya penulis menunjukkan syarat perlu perumuman ketaksamaan Hölder pada ruang barisan Orlicz. Berikut adalah teorema yang diperoleh.

Teorema 23. Syarat Perlu Perumuman Ketaksamaan Hölder pada Ruang Barisan Orlicz

Misalkan $m \geq 2$ $dan\ \Phi, \Phi_i$ adalah fungsi Young dengan $i = 1, \dots, m$. Jika $\|\prod_{i=1}^{m} X_i\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} \leq m \prod_{i=1}^{m} \|X_i\|_{\ell_{\Phi_i}(\mathbb{Z})}$ untuk sembarang $X_i \in \ell_{\Phi_i}(\mathbb{Z})$ dengan $i = 1, \dots, m$, maka

$$\prod_{i=1}^{m} \Phi_i^{-1}(t) \leq m\Phi^{-1}(t),$$

dengan $t = \frac{1}{2N_0+1}$.

Bukti.

Misalkan $\|\prod_{i=1}^{m} X_i\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} \leq m \prod_{i=1}^{m} \|X_i\|_{\ell_{\Phi_i}(\mathbb{Z})}$. Selanjutnya, pilih $X_i \coloneqq \xi_k^{m_0,N_0}$, yaitu barisan karakteristik pada $\mathbb{Z}$. Dengan memanfaatkan Lema 15., maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{2N_0+1}\right)} = \left\|\prod_{i=1}^{m} \xi^{m_0,N_0}\right\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} &\leq m \prod_{i=1}^{m} \|\xi^{m_0,N_0}\|_{\ell_{\Phi_i}(\mathbb{Z})} \\ &= m \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\Phi_i^{-1}\left(\frac{1}{2N_0+1}\right)}, \end{aligned}$$

atau dengan kata lain

$$\prod_{i=1}^{m} \Phi_i^{-1}\left(\frac{1}{2N_0+1}\right) \leq m\Phi^{-1}\left(\frac{1}{2N_0+1}\right).$$

Dengan memisalkan $t = \frac{1}{2N_0+1}$, maka dapat disimpulkan bahwa

$$\prod_{i=1}^{m} \Phi_i^{-1}(t) \leq m\Phi^{-1}(t).$$

■

Selanjutnya, berdasarkan Teorema 22. dan Teorema 23., maka diperoleh akibat sebagai berikut.

Akibat 24. Syarat Cukup dan Perlu Perumuman Ketaksamaan Hölder pada Ruang Barisan Orlicz

Misalkan $m \geq 2$, $N_0 \in \omega$, dan Φ, Φ_i adalah fungsi Young dengan $i = 1, \dots, m$. Maka pernyataan berikut berlaku.

(1) Jika $\prod_{i=1}^{m} \Phi_i^{-1}(t) \leq \Phi^{-1}(t)$ untuk $t = \frac{1}{2N_0+1}$, maka

$$\left\|\prod_{i=1}^{m} X_i\right\|_{\ell_\Phi(\mathbb{Z})} \leq m \prod_{i=1}^{m} \|X_i\|_{\ell_{\Phi_i}(\mathbb{Z})},$$

e-ISSN: 2528-4231
p-ISSN: 2776-480X

untuk sembarang $X_i \in \ell_{\Phi_i}(\mathbb{Z})$ dengan $i = 1, \dots, m$ dan $\prod_{i=1}^{m} X_i \in \ell_{\Phi}(\mathbb{Z})$.

(2) Jika $\|\prod_{i=1}^{m} X_i\|_{\ell_{\Phi}(\mathbb{Z})} \leq m \prod_{i=1}^{m} \|X_i\|_{\ell_{\Phi_i}(\mathbb{Z})}$ untuk sembarang $X_i \in \ell_{\Phi_i}(\mathbb{Z})$, dengan $i = 1, \dots, m$, maka

$$\prod_{i=1}^{m} \Phi_i^{-1}(t) \leq m\Phi^{-1}(t)$$

untuk $t = \frac{1}{2N_0+1}$.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan pemaparan pada bab sebelumnya, maka dapat diperoleh simpulan sebagai berikut:

1. Struktur dari ruang barisan Orlicz terkait ketaksamaan norma pada ruang tersebut dapat dilihat pada Lema 8. Hingga Lema 12, dimana hasil tersebut serupa dengan hasil yang telah diperoleh pada ruang Orlicz.
2. Syarat cukup dan perlu sifat inklusi pada ruang barisan Orlicz diperoleh dengan memanfaatkan norma barisan karakteristik pada $\mathbb{Z}$. Kondisi $\Phi_1(t) \leq \Phi_2(Ct)$ untuk suatu $C > 0$ dan sembarang $t > 0$ merupakan kondisi agar berlaku syarat cukup sifat inklusi pada ruang Orlicz dan juga pada ruang barisan Orlicz.
   Namun, syarat perlu sifat inklusi pada ruang barisan Orlicz hanya berlaku untuk $t = C\Phi_2^{-1}\left(\frac{1}{2N_0+1}\right)$, berbeda dengan syarat cukup sifat inklusi pada ruang Orlicz yang berlaku untuk sembarang $t > 0$. Lebih jauh lagi, berdasarkan hal tersebut maka diperoleh syarat cukup dan perlu sifat inklusi pada ruang barisan Orlicz.
3. Kondisi $\prod_{i=1}^{m} \Phi_i^{-1}(t) \leq \Phi^{-1}(t)$ untuk sembarang $t \geq 0$ merupakan kondisi agar berlaku syarat cukup perumuman ketaksamaan Hölder pada ruang Orlicz dan juga pada ruang barisan Orlicz.
   Kemudian syarat perlu perumuman ketaksamaan Hölder pada ruang barisan Orlicz diperoleh dengan memanfaatkan norma barisan karakteristik pada $\mathbb{Z}$, namun hal tersebut hanya berlaku untuk $t = \frac{1}{2N_0+1}$, berbeda dengan kondisi pada ruang Orlicz yang berlaku untuk sembarang $t \geq 0$. Lebih jauh lagi, berdasarkan hal tersebut maka diperoleh syarat cukup dan perlu perumuman ketaksamaan Hölder pada ruang barisan Orlicz.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Orlicz, W. (1992). *Linear Functional Analysis (Series in Real Analysis Volume 4).* Singapore: World Scientific.

[2] Kamthan, P. K., & Gupta, M. (1981). *Sequence Spaces and Series.* New York: Marcel Dekker, Inc.

[3] Abbas, N. M. (2013). Some Properties On Orlicz Sequence Spaces. *Journal of Babylon University/Pure and Applied Sciences, 21*, 2340-2345.

[4] Khusnussa'adah, N., & Supama. (2019). Completeness of Sequence Spaces Generated by an Orlicz Function. *Jurnal Eksakta: Jurnal Ilmu-ilmu MIPA, 19*(1), 1-14.

[5] Rao, M., & Ren, Z. (1991). *Theory of Orlicz spaces.* New York: Marcel Dekker, Inc.

[6] Roberts, A. W., & Varberg, D. E. (1973). *Convex Functions.* New York and London: Academic Press, Inc.

[7] Lindenstrauss, J., & Tzafriri, L. (1977). *Classical Banach Spaces I and II.* Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[8] Gunawan, H., Kikianty, E., & Schwanke, C. (2017). Discrete Morrey Spaces and Their Inclusion Properties. *Mathematische Nachrichten, 291*(8-9), 1-14.

[9] Maligranda, L. (1989). *Orlicz Spaces and Interpolation.* Departamento de Matemática: Universidade Estadual de Campinas.

[10] Masta, A. A. (2018). *Sifat Inklusi pada Ruang Orlicz-Morrey.* Bandung: Institut Teknologi Bandung.

[11] Kufner, A., John, O., & Fucik, S. (1977). *Function Spaces.* Czechoslovakia: Noordhoff International Publishing.

[12] Lindenstrauss, J., & Tzafriri, L. (1971). On Orlicz Sequence Spaces I. *Israel Journal of Mathematics, 10*, 379-390.

[13] Maligranda, L., & Mastylo, M. (2000). Inclusion Mappings between Orlicz Sequence Spaces. *Journal of Functional Analysis 176*, 264-279.

[14] Masta, A. A., Gunawan, H., & Setya-Budhi, W. (2016). Inclusion property of Orlicz and weak Orlicz spaces. *Journal of Mathematical and Fundamental Sciences, 48-3,* 193-203.

[15] Masta, A. A., Gunawan, H., & Setya-Budhi, W. (2017). An inclusion property of Orlicz-Morrey spaces. *Journal of Physics: Conference Series, 893*.

[16] O'Neil, R. (1965). Fractional Integration in Orlicz Spaces. I. *Transactions of the American Mathematical Society, 115*, 300-328.

[17] Prayoga, P. S. (2020). Several Properties of Discrete Orlicz Spaces. *MSCEIS 2019* (hal. 9). Bandung: EAI.

e-ISSN: 2528-4231
p-ISSN: 2776-480X

[18] Taqiyuddin, M., & Masta, A. A. (2018). Inclusion Properties of Orlicz Spaces and Weak Orlicz Spaces Generated by Concave Functions. *IOP Conference Series: Materials Science and and Engineering*.

[19] Welland, R. (1966). Inclusion relations among Orlicz spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, *17*(135).

[20] Ifronika, Masta, A. A., Nur, M., & Gunawan, H. (2018). Generalized hölder's inequality in Orlicz spaces. *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, *22*(1), 25-34.