Analisis Data Kemampuan Menghafal Alquran Dengan Menggunakan Model Regresi Untuk Data Berdistribusi Normal Terpotong Atas Bawah

Rachmi Dwiyati*, Nar Herrhyanto dan Bambang Avip Priatna

Departemen Pendidikan Matematika
Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Pendidikan Indonesia
*Surel: rachmidwiyati@student.upi.edu

ABSTRAK. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menganalisis data kemampuan menghafal Alquran yang datanya diperoleh dari hasil ujian *taḫfizh* menggunakan sebuah instrumen tes, dan digunakan model regresi terpotong. Dilihat dari pembatasan nilai pada variabel dependennya dan variabel independennya hanya akan diobservasi jika variabel dependennya diobservasi, analisis yang digunakan adalah distribusi normal terpotong atas bawah. Model regresi untuk data ini, nilai-nilai variabel dependennya berupa $q < Y_i < r$ dimana data yang diobservasi berada diantara titik q yang merupakan batas bawah yaitu nilai 44 dan titik r merupakan batas atas yaitu nilai 96 dari data dependen yang diobservasi. Metode yang digunakan untuk menaksir parameter dalam model adalah metode kemungkinan maksimum dengan menggunakan bantuan iteratif Newton Raphson. Analisis data dilakukan dengan menentukan model regresi linear dan model regresi untuk data terpotong atas bawah, kemudian uji asumsi normalitas serta uji koefisien secara parsial model regresi untuk data berdistribusi normal terpotong atas bawah. Hasil yang diperoleh dari penelitian ini yaitu model regresi yang menggambarkan hubungan antara nilai ujian *taḫfizh,* nilai *taḫsin,* dan nilai akhir.

Kata kunci: kemampuan menghafal Alquran, model regresi data berdistribusi normal terpotong atas bawah

The Data Analysis of the Capability to Memorize the Quran using the Regression Model of Truncated Normal Distribution Below or Above

ABSTRACT. *The purpose of this study was to analyze data on the ability to memorize the Koran whose data was obtained from the results of the examination using a test instrument and using a truncated regression model. Judging from the value limitation on the dependent variable and the independent variable which will only be observed if the dependent variable is observed, the analysis used is doubly truncated normal distribution. In the regression model for this data, the values of the dependent variable in the form of q <Yi < r where the observed data is between point q which is the lower limit of the value 44 and point r is the upper limit of the value of 96 from the dependent data observed. The method used to estimate the parameters in the model is the maximum likelihood method using Newton Raphson's iterative assistance. Data analysis was performed by determining a linear regression model and a regression model for doubly truncated data, then testing the normality assumption and partially testing the coefficient of the regression model for data with a normal doubly truncated distribution. The results obtained from this study are a regression model produced which illustrates the relationship between the tahfizh test score, the tahsin value, and the final value.*

Keywords: *the ability to memorize, the Quran, doubly truncated regression model.*

e-ISSN: 2528-4231
p-ISSN: 2776-480X

1. PENDAHULUAN

Penghafal Alquran merupakan penjaga *kalam-Allah*. Karena salah satu cara terbaik untuk menjaga suatu ilmu atau isi dari suatu kitab adalah dengan menghafalnya. Setiap penghafal Alquran masing-masing memiliki kemampuan menghafal Alquran. Salah satu cara terbaik untuk menjaga suatu ilmu atau isi dari suatu kitab adalah dengan menghafalnya. Salah satu cara untuk mengetahui kemampuan menghafal Alquran para penghafal Alquran adalah dengan dilakukan ujian hafalan. Dari ujian tersebut akan diperoleh nilai yang dapat menggambarkan kemampuan menghafal Alquran. Untuk mendapatkan sebuah nilai akhir maka diperlukan beberapa variabel dalam penilaiannya tersebut.

Banyak penelitian yang seringkali mengambil kasus hubungan dari dua variabel atau lebih dan peneliti biasanya menggunakan regresi untuk menyelesaikan kasus tersebut. Hal ini disebabkan karena peneliti memerlukan suatu model matematis untuk menggambarkan suatu hubungan yang fungsional dalam kasus tersebut. Sebagai contoh Witte menerapkan metode ini dalam bidang kesehatan dengan meneliti relasi diet dan kanker payudara [1], Patil, dkk memanfaatkan regresi dalam bidang forensik dengan meneliti sefalometri lateral dalam menentukan jenis kelamin [2], atau sebagai Caydas menerapkan regresi pada bidang keuangan yakni meneliti performa bank domestik dan asing di Thailand [3].

Regresi merupakan salah satu teknik statistika dengan menggunakan model matematis yang biasa digunakan untuk menyelidiki suatu hubungan antara dua variabel atau lebih, dimana salah satu variabelnya merupakan variabel dependen (Y) atau variabel tak bebas dan peubah lainnya biasa disebut variabel independen (X) atau variabel bebas.

Pada beberapa kondisi, dalam suatu populasi akan didapatkan suatu subpopulasi yang akan diteliti lebih lanjut untuk mencapai suatu tujuan tertentu. Kemudian, apabila peneliti melakukan pembatasan nilai pada variabel dependennya dan variabel independennya hanya akan diobservasi jika variabel dependennya diobservasi, maka model regresi yang akan digunakan adalah model regresi dengan variabel yang terpotong. Adanya kriteria kelulusan menyebabkan diberlakukannya pemotongan data, sehingga tidak semua data yang diperoleh akan digunakan untuk penelitian [4]. Metode ini sebagaimana regresi, banyak digunakan dalam berbagai penelitian termasuk di antaranya diterapkan dalam bidang kesehatan mental [5].

Jika suatu populasi telah diketahui berdistribusi normal, maka distribusi akibat adanya pemotongan nilai tertentu berubah menjadi distribusi normal terpotong. Pada penelitian ini, yang akan digunakan adalah regresi dengan data yang berdistribusi normal terpotong atas bawah, dimana data akan dipilih dengan titik potong bawahnya q dan titik potong atasnya adalah r pada data yang diobservasi. Kemudian, apabila data yang diobservasi berada diantara titik q dan r, maka dapat dituliskan $q < Y_i < r$ [5].

Tujuan dari penelitian ini adalah membahas tentang analisis regresi untuk data yang berdistribusi normal terpotong atas bawah (*doubly truncated normal distribution)* yaitu meneliti data kemampuan menghafal Alquran. Dalam data tersebut terdapat variabel dependen yaitu nilai akhir yang akan dipotong berdasarkan kriteria kelulusan.

2. METODOLOGI

2.1. Instrumen Penelitian

Instrumen yang digunakan untuk menuji kemampuan hafalan para penghafal Alquran dijabarkan pada Tabel 2.1 sebagai berikut:

Tabel 1. Instrumen Penilaian Ujian *Tahfizh*

Banyak Ujian	**Indikator**	**Jenis Ujian**	**Bobot Nilai Maksimal**
1	Peserta dapat membacakan surat yang sudah ditentukan oleh tester, contoh : peserta diminta membacakan QS Al Balad.	*tahfizh* tipe I	15
2	Peserta dapat melanjutkan bacaan dari awal surat yang ditentukan oleh tester	*tahfizh* tipe II	10
3	Peserta dapat melanjutkan bacaan yang dimulai dari tengah surat yang dibacakan tester (minimal 5 ayat),	*tahfizh* tipe II	15
4	Peserta dapat melanjutkan bacaan yang dimulai dari tengah surat yang lain yang dibacakan tester (minimal 5 ayat)	*tahfizh* tipe II	15
5	Peserta dapat melanjutkan bacaan dari akhir surat yang dibacakan tester (minimal 5 ayat), masuk ke surat baru	*tahfizh* tipe II	20
6	Soal bonus (soal yang mudah dan dibebaskan oleh tester)	*tahfizh* tipe I	5

7	Peserta dapat membacakan surat yang sudah ditentukan tester dengan menerapkan ilmu tajwid secara tepat. Komponen yang dinilai pada *point* ini adalah *makhârij al-hurûf* , tanda panjang (*mad*), *waqaf* dan *ibtida'*.	*Tahsîn*	20

Dengan kriteria penilaian sebagai berikut:

a. $85 \leq skor \leq 100$: A (*Mumtaz*)
b. $75 \leq skor < 85$: AB (*Jayyid Jiddan*)
c. $60 \leq skor < 75$: B (*Jayyid*)
d. $45 \leq skor < 60$: C (*Naqish*)
e. $skor < 45$: D (*Rasib*)

2.2. Analisis Data

Langkah-langkah analisis data dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Mengumpulkan data
2. Menentukan model regresi
   a. Model regresi linear
   b. Model regresi untuk data berdistribusi normal terpotong atas bawah
3. Uji asumsi normalitas
4. Membuat model regresi yang menggambarkan hubungannya antara variabel dependen dengan variabel independenya dengan, regresi untuk data berdistribusi normal terpotong atas bawah dengan koefisien yang signifikan

2.3. Distribusi Normal Terpotong Atas Bawah

Jika *Y* berdistribusi normal dengan mean μ dan standar deviasi σ, maka fungsi densitas normal terpotong sebagai berikut.

$$f(x|q < y < r) = \frac{f(y)}{P(q < y < r)}$$

Kemudian peubah acak *Y* dikatakan berdistribusi normal umum, jika dan hanya jika fungsi kepadatan peluangnyanya berbentuk:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi.\sigma^2}} \exp\left[\frac{-1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2\right];\ -\infty < y < \infty, -\infty < \mu < \infty$$
$$\sigma^2 > 0 \qquad ,$$

Kemudian, apabila nilai *y* yang berada di bawah suatu nilai *q* dan di atas nilai *r* tidak dapat diobservasi, maka hasil distribusi yang diperoleh merupakan distribusi normal terpotong atas-bawah dengan fungsi kepadatan peluang sebagai berikut :

$$f_{y/_{r-q}}(y|q<y<r) = \begin{cases} 0 & ; -\infty < y < q \\ \dfrac{f(y)}{\int_q^r f(y)\,dx} & ; q \le y \le r \\ 0 & ; r < y \le \infty \end{cases}$$

Dimana *f(y)* adalah fungsi kepadatan peluang dari distribusi normal. Jika $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dan *q* dan *r* adalah konstanta, maka mean dan varian dari distribusi normal terpotong atas bawah adalah :

i. $E(Y|q<Y<r) = \mu - \sigma\big(\lambda(\beta) - \lambda(\alpha)\big)$

ii. $Var(Y|q<Y<r) = \sigma^2\big(1 + 2\lambda(\alpha)\lambda(\beta)\big) - \sigma^2\left(\delta(\alpha) + \delta(\beta)\dfrac{(\lambda(\beta)+\beta)}{(\lambda(\beta)-\beta)}\right)$

Dengan , $\lambda(\alpha) = \dfrac{\phi(\alpha)}{\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)}$, $\alpha = \dfrac{q-\mu}{\sigma}$

$\lambda(\beta) = \dfrac{\phi(\beta)}{\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)}$, $\beta = \dfrac{r-\mu}{\sigma}$, $\phi(\alpha) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\alpha)^2}$,

$\phi(\beta) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\beta)^2}$,

$$\Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \int_\alpha^\beta \phi(z)dz$$

$\delta(\alpha) = \lambda(\alpha)(\lambda(\alpha) - \alpha), 0 < \delta(\alpha) < 1$ untuk setiap α

$\delta(\beta) = \lambda(\beta)(\lambda(\beta) - \beta), 0 < \delta(\beta) < 1$ untuk setiap β.

2.4. Model Regresi Terpotong Atas Bawah

Model regresi berganda dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$Y = X'{}_i\beta + \varepsilon_i$$

Mean dan varians dari distribusi Y_i tersebut adalah

$$E(Y_i|q < Y_i < r) = X_i'\beta - \sigma \ \lambda \ \frac{r - X_i'\beta}{\sigma} \ - \lambda \ \frac{q - X_i'\beta}{\sigma}$$

$$\begin{aligned} &Var(Y_i|q < Y_i < r) \\ &= \sigma^2 \left(1 + 2\lambda\left(\frac{q - X_i'\beta}{\sigma}\right)\lambda\left(\frac{r - X_i'\beta}{\sigma}\right)\right) \\ &\qquad - \sigma^2 \left(\delta\left(\frac{q - X_i'\beta}{\sigma}\right) \right. \\ &\qquad \left. + \delta\left(\frac{r - X_i'\beta}{\sigma}\right) \frac{\left(\lambda\left(\frac{r - X_i'\beta}{\sigma}\right) + \left(\frac{r - X_i'\beta}{\sigma}\right)\right)}{\left(\lambda\left(\frac{r - X_i'\beta}{\sigma}\right) - \left(\frac{r - X_i'\beta}{\sigma}\right)\right)} \right) \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh model regresi untuk data berdistribusi normal terpotong atas bawahnya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Yi \mid q < Yi \ < \ r &= E(Yi \mid q < Yi \ < r) + \varepsilon \\ &= X_i'\beta - \sigma\left(\lambda\left(\frac{r - X_i'\beta}{\sigma}\right) - \lambda\left(\frac{q - X_i'\beta}{\sigma}\right)\right) + \varepsilon_i \end{aligned}$$

dengan i = 1, 2, ..., n observasi

Adanya pengurangan suku $\sigma\left(\lambda\left(\frac{b - X_i'\beta}{\sigma}\right) - \lambda\left(\frac{a - X_i'\beta}{\sigma}\right)\right)$ menyebabkan model regresi terpotong atas bawahnya berbentuk nonlinear dalam β dan X_i.

2.5. Taksiran Parameter

Estimasi parameter menggunakan metode kuadrat terkecil pada bentuk persamaan regresi nonlinear menyebabkan estimasi parameternya tidak diperoleh, hal tersebut karena fungsi $y = f(x)$ mencapai nilai ekstrim dimana hal tersebut tidak memberikan solusi. Jika estimasi parameternya tidak diperoleh, maka uji koefisien tidak dapat dilakukan. Kemudian, metode lain yang dapat digunakan adalah metode kemungkinan maksismum (*Maximum Likelihood Method*) yang memiliki sifat lebih umum sebagai acuan untuk menentukan estimasi parameter dari sebuah distribusi, sehingga uji koefisien regresi dapat dilakukan.

Herrhyanto [6] mendefinisikan fungsi kemungkinan maksimum dengan memisalkan $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n$ yang merupakan sebuah sampel acak berukuran n yang berasal dari distribusi dengan fkp berbentuk $(y; \theta)$.

Fungsi kemungkinannya adalah :

$(\theta) = (y_1; \theta).(y_2; \theta). \dots .f(y_n; \theta)$

Penaksir kemungkinan maksimum adalah nilai θ yang memaksimumkan fungsi kemungkinan $L(\theta)$. Dalam pelaksanaannya, kedua ruas pada $L(\theta)$ diberi ln.

Pada uraian sebelumnya, telah didapatkan fungsi densitas peluang yang terpotong atas pada nilai r dan terpotong bawah pada nilai r, dengan variabel acak Y. Apabila variabel acak Y disubstitusikan oleh sampel acak $y_1, y_2, \dots, y_n$, dan μ disubstitusikan oleh $X_i{}'\beta$ maka dapat diperoleh fungsi densitas peluang terpotong sebagai berikut :

$$f(Y_i|q < Y_i < r) = \frac{\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y_i - X_i'\beta}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{r - X_i'\beta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{q - X_i'\beta}{\sigma}\right)}$$

Sehingga diperoleh fungsi kemungkinan sebagai berikut :

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(y_i|q < Y_i < r)$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y_i - X_i'\beta}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{r - X_i'\beta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{q - X_i'\beta}{\sigma}\right)}\right]$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - X_i'\beta}{\sigma}\right)^2}\right]}{\prod_{i=1}^{n}\left[\Phi\left(\frac{r - X_i'\beta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{q - X_i'\beta}{\sigma}\right)\right]}$$

Jadi, fungsi kemungkinan yang diperoleh sebagai berikut:

$$\ln L = \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{y_i - X_i'\beta}{\sigma}\right)^2\right] - \sum_{i=1}^{n} ln\left[\Phi\left(\frac{r - X_i'}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{q - X_i'}{\sigma}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(2\pi) - ln\,\sigma^2\left(\frac{y_i - X_i'\beta}{\sigma}\right)\right] - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[2\ln\left(\frac{r - X_i'\beta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{q - X_i'\beta}{\sigma}\right)\right]$$

Misal: $\gamma = \frac{1}{\sigma}\beta$ dan $\theta = \frac{1}{\sigma}$

Maka:

$$\ln L = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[\ln(2\pi) - \ln\theta^2 + (\theta y_i - x_i'\gamma)^2] - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[2\ln(\Phi(\theta r - x_i'\gamma) - \Phi(\theta q - x_i'\gamma))]$$

θ dan γ

Nilai $\partial \ln L\,(\theta\quad)$ akan ditaksir menggunakan MLE:

$$G = \frac{,\gamma}{\partial\begin{pmatrix}\theta\\ \gamma\end{pmatrix}} = 0$$

Dengan melakukan turunan pertama dari ln L terhadap θ atau $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}$ dan terhadap y atau $\frac{\partial \ln L}{\partial \gamma}$ diperolehgradient turunan pertamanya sebagai berikut :

$$G = \frac{\partial \ln L\,(\theta,\gamma)}{\partial\begin{pmatrix}\theta\\ \gamma\end{pmatrix}} = \frac{\left[\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\theta} - y_i z_i - r\lambda(\beta_i) + q\lambda(\alpha_i)\right]\right]}{\left[\sum_{i=1}^{n}\left[x_i z_i + x_i\left(\lambda(\beta_i) - \lambda\,(\alpha_i)\right)\right]\right]}$$

Nilai G = 0 tidak dapat memberikan penyelesaian, karena setelah log fungsi kemungkinan diturunkan, turunannya masih mengandung parameter lain yang tidak diketahui nilainya. Sehingga akan digunakan metode Newton Raphson. Untuk mempermudah penurunan, maka terlebih dahulu dicari:

$$\frac{\partial\Phi(\alpha_i)}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\Phi(\theta q - x_i'\gamma)$$
$$= q\ \phi(\theta q - x_i'\gamma)$$
$$= q\ \phi(\alpha_i)$$
$$\frac{\partial\Phi(\alpha_i)}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\phi(\theta q - x_i'\gamma)$$
$$= \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\theta q - x_i'\gamma)^2}\right]$$
$$= -q\ (\theta a - x_i'\gamma)\ \phi(\theta a - x_i'\gamma)$$
$$= -\ q\ (\alpha_i)\ \phi(\alpha_i)$$
$$\frac{\partial \lambda\,(\alpha_i)}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\phi(\alpha_i)}{\Phi(\beta_i) - \Phi(\alpha_i)}\right]$$
$$= \frac{\big(\Phi(\beta_i) - \Phi(\alpha_i)\big)\big(-q(\alpha_i)\phi(\alpha_i)\big) - \phi(\alpha_i)\big(r\phi\,(\beta_i) - q\phi(\alpha_i)\big)}{\big(\Phi(\beta_i) - \Phi(\alpha_i)\big)^2}$$
$$= -q(\alpha_i)\lambda\,(\alpha_i) - \lambda\,(\alpha_i)\,\big(r\lambda\,(\beta_i) - q\lambda\,(\alpha_i)\big)$$
$$\frac{\partial\Phi\,(\alpha_i)}{\partial\gamma'} = \frac{\partial}{\partial\gamma'}\Phi(\theta q - x_i'\gamma)$$
$$= (-x_i')\,\phi(\theta q - x_i'\gamma)$$
$$= -x_i'\phi(\alpha_i)$$
$$\frac{\partial\phi\,(\alpha_i)}{\partial\gamma'} = \frac{\partial}{\partial\gamma'}\phi(\theta q - x_i'\gamma)$$
$$= \frac{\partial}{\partial\gamma'}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\theta q - x_i'\gamma)^2}\right]$$
$$= (-x_i')(\theta q - x_i'\gamma)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\theta q - x_i'\gamma)^2}$$
$$= x_i'(\alpha_i)\phi(\alpha_i)$$
$$\frac{\partial\lambda\,(\alpha_i)}{\partial\gamma'} = \frac{\partial}{\partial\gamma'}\left[\frac{\phi(\alpha_i)}{\Phi(\beta_i) - \Phi(\alpha_i)}\right]$$
$$= \frac{x_i'\,(\alpha_i)\phi(\alpha_i)}{\Phi(\beta_i) - \Phi(\alpha_i)} + \frac{\phi(\alpha_i)\big(x_i'\,\phi\,(\beta_i) - x_i'\,\phi(\alpha_i)\big)}{\big(\Phi(\beta_i) - \Phi(\alpha_i)\big)^2}$$
$$= x_i'\,(\alpha_i)\lambda\,(\alpha_i) + \lambda\,(\alpha_i)\,\big(x_i'\,\lambda\,(\beta_i) - x_i'\,\lambda\,(\alpha_i)\big)$$

Maka, turunan kedua dari ln L atau $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta\ \partial\theta}$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta\ \partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\theta} - y_i z_i - r\ \lambda\,(\beta_i) + q\ \lambda\,(\alpha_i)\right]\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\xi_{11i}$$

Turunan kedua dari ln L atau $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta\ \partial\gamma'}$ adalah sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta\ \partial\gamma'} = \frac{\partial}{\partial\gamma'}\left[\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\theta} - y_i z_i - r\,\lambda\,(\beta_i) + q\,\lambda\,(\alpha_i)\right]\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \xi_{21i}$$

Turunan kedua dari ln L atau $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta\ \partial\theta}$ adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta\ \partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sum_{i=1}^{n}[x_i z_i + x_i\,\lambda\,(\beta_i) - x_i\,\lambda\,(\alpha_i)]\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \xi_{12i}$$

Sedangkan untuk $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\gamma\ \partial'_\gamma}$ diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\gamma\ \partial'_\gamma} = \frac{\partial}{\partial'_\gamma}\left[\sum_{i=1}^{n}[x_i z_i + x_i\,\lambda\,(\beta_i) - x_i\,\lambda\,(\alpha_i)]\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \xi_{22i}$$

Sehingga, diperoleh matriks Hessian:

$$H = \frac{\partial \ln L\,(\theta,\gamma)}{\partial\binom{\theta}{\gamma}(\theta,\gamma)} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}\xi_{11i} & \sum_{i=1}^{n}\xi_{12i} \\ \sum_{i=1}^{n}\xi_{21i} & \sum_{i=1}^{n}\xi_{22i} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan uraian di atas, taksiran parameter dengan menggunakan bantuan Metode Newton Raphson menjadi:

$$\begin{bmatrix}\hat{\theta}^{m+1} \\ \hat{\gamma}^{m+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\hat{\theta}^{m} \\ \hat{\gamma}^{m}\end{bmatrix} - [H^m]^{-1}(G^m)$$

Setelah dilakukan penaksiran (θ, γ) , maka berdasarkan berdasarkan persamaan $\gamma = \frac{1}{\sigma}\beta$ dan $\theta = \frac{1}{\sigma}$ estimasi (β, σ) dapat dilakukan dengan $\hat{\gamma} =$

$\frac{1}{\hat{\theta}}\hat{\beta}$ dan $\hat{\theta} = \frac{1}{\hat{\theta}}$. Untuk perhitungan $\hat{\beta}_i$ dilakukan dengan menggunakan software *eviews* 9, dimana taksiran parameter yang diperoleh menggunakan bantuan metode iterasi numerik Newton Raphson.

Setelah diperoleh taksiran parameter ($\hat{\beta}$,$\hat{\sigma}$) , maka model regresi terpotong atas bawah dapat diperoleh. Namun sebelumnya dilakukan pengujian terhadap koefisien-koefisien yang diperoleh, untuk mengetahui apakah koefisien-koefisien tersebut signifikan atau tidak signifikan untuk disubstitusikan kedalam persamaan regresi. Pengujiannya dilakukan dengan menggunakan software *Eviews* 9.

$$\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i^*}{\sqrt{\frac{1}{n} E\left(\frac{\partial}{\partial \beta} \ln f(y_i | q < Y_i < r;\ \beta)\right)^2}} \sim N(0,1),$$

dengan

$$(y_i | q < Y_i < r) = \frac{\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y_i - X_i'\beta}{\sigma}\right)}{\Phi\ \frac{r - X_i'\beta}{\sigma} - \Phi\ \frac{q - X_i'\beta}{\sigma}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Pada regresi linear pengujian terhadap H_0: $\beta_i = \beta_i^*$ digunakan statistik: $\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{S(\hat{\beta}_i)} \sim t_{n-p}$

dengan n = banyak data, dan p = banyak arameter dalam model regresi.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelitian ini dilakukan untuk menganalisis data yang variabel dependennya (Nilai Akhir) terpotong atas bawah. Berdasarkan hasil wawancara dengan salah satu pembina Yayasan *Tahfizh* di Bandung, nilai kelulusan merujuk pada standar penilaian salah satu yayasan *tahfizh* di Bandung dengan nilai 45 (*naqish*) masuk dalam kategori nilai paling rendah untuk lulus (tanpa syarat) dan nilai tertinggi nya ada pada nilai 95-100 (*mumtaz*), tetapi peneliti memilih nilai 95 untuk batas atas karena nilai 95 sudah dikategorikan sebagai nilai yang sempurna, dimana peserta yang mengikuti ujian tersebut dapat menjawab semua ujian dengan benar. Sedangkan, untuk nilai kurang dari 45 para peserta harus mengulang hafalan nya dahulu baru kemudian boleh melanjutkan menghafalkan hafalannya yang baru. Karena adanya standar nilai tersebut, maka nilai variabel dependen (Y) pada penelitian ini dibatasi pada nilai dari 45 sampai 95. Salah satu *output* pada penelitian ini yakni untuk mengetahui model regresi dari data terpotong dan hubungan antara nilai ujian *tahfizh*, nilai *tahsin,* dan nilai akhir.

Pada uji asumsi normalitas, hasil *output* dengan Program SPSS diperoleh *p-value* untuk nilai akhir, sebesar 0,675 > 0,05 yang berarti bahwa data nilai akhir berasal dari populasi yang berdistribusi normal. Kemudian pada uji koefisien secara parsial untuk Model Regresi dengan Data Terpotong Atas Bawah, berdasarkan *output* dari Program *Eviews* terhadap nilai koefisien, statistik uji, dan p-*value* diperoleh perhitungan nilai koefisien atau parameter dugaan $\hat{\beta}_i$ dengan metode Newton Rapshon konvergen pada iterasi ke-3.

Berikut nilai-nilai koefisien koefisien, statistik uji, dan p-*value* yang disajikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Nilai koefisien, t hitung dan p-*value*
Persamaan Regresi dari Data Terpotong

Variabel	Koefisien	Z hitung	p-*value*
C	-0,022365	-0,708775	0,4785
X_1	1,000019	2856,181	0,0000
X_2	1,001819	641,1597	0,0000

Berdasarkan table 2, diperoleh nilai p-*value* dari X_1, X_2 yang nilainya 0,000 < 0,05. Artinya, koefisien X_1 dan X_2 berpengaruh signifikan terhadap variabel Y, atau Nilai Ujian *Ta<u>h</u>fîzh* (X_1) dan Nilai *Ta<u>h</u>sîn* (X_2) masing-masing berpengaruh secara signifikan terhadap variabel dependen Y (Nilai Akhir). Sehingga hubungan antara variabel dependen dengan variabel independen dapat digambarkan dalam bentuk model regresi untuk data terpotong atas bawah dengan koefisien yang signifikan sebagai berikut :

$$Y^* = -0{,}022365 + 1{,}000019X_1 + 1{,}001819X_2 - \sigma\left(\lambda\left(\frac{96-(1{,}000019X_1+1{,}001819X_2)}{\sigma}\right) - \lambda\left(\frac{44-(1{,}000019X_1+1{,}001819X_2)}{\sigma}\right)\right)$$

dengan $Y^* = Y|44 < Y < 96$.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan penelitian ini, diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Kajian teoritis analisis regresi untuk data berdistribusi normal terpotong atas bawah, data berdistribusi normal terpotong atas bawah merupakan sekumpulan data berdistribusi normal dengan variabel dependen yang mengalami pembatasan atau pemotongan pada titik atas dan titik bawahnya untuk tujuan tertentu, kemudian model regresi yang dgunakan untuk menjelaskan hubungan antara variabel dependen dan variabel independen yang variabel dependennya dibatasi pada titik atas dan bawahnya. Selain itu, bentuk mean dan variansi berubah menjadi mean bersyarat dan varians bersyarat serta model regresinya berubah sebagai berikut :

   Mean dan varians untuk distribusi normal terpotong atas bawah :
   $(Y|q < Y < r) = \mu - (\lambda\,(\beta) - \lambda\,(\alpha))$,

$$Var(Y|q < Y < r) = \sigma^2\big(1 + 2\lambda(\alpha)\lambda(\beta)\big) - \sigma^2\left[\delta(\alpha) + \delta(\beta)\frac{(\lambda(\beta)+\beta)}{(\lambda(\beta)-\beta)}\right],$$

dengan $\lambda(\alpha) = \frac{\phi(\alpha)}{\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)}, \alpha = \frac{q-\mu}{\sigma}$,

$\lambda(\beta) = \frac{\phi(\beta)}{\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)}, \ \beta = \frac{r-\mu}{\sigma}$,

$\phi(\alpha) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\alpha)^2}$,

$\phi(\beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\beta)^2}$,

$\Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \int_\alpha^\beta \phi(z)\, dz$

$\delta(\alpha) = \lambda(\alpha)(\lambda(\alpha) - \alpha), 0 < \delta(\alpha) < 1 \ untuk\ setiap\ \alpha.$

$\delta(\beta) = \lambda(\beta)(\lambda(\beta) - \beta), 0 < \delta(\beta) < 1 \ untuk\ setiap\ \beta.$

Model regresi untuk data berdistribusi normal terpotong atas bawah :

$Y_i{}^* = E(Y_i|q < Y_i < r) + {}_i$

$$Y_i^* = Y_i|q < Y_i < r.$$

$$= X_i'\beta - \sigma \left(\lambda\left(\frac{r - X_i'\beta}{\sigma}\right) - \lambda\left(\frac{q - X_i'\beta}{\sigma}\right)\right) + \varepsilon_i$$

2. Pada penerapannya, model regrasi untuk data berdistribusi normal terpotong dengan membatasi variabel dependennya yakni nilai akhir (Y) pada batas bawahnya dengan nilai 44 dan batas atasnya dengan nilai 100 sebagai fungsi dari dua variabel, yaitu nilai ujian *tahfidz* (X_1) dan nilai *tahsin* (X_2), kemudian pada akhirnya menyatakan bahwa variabel-variabel X_1 dan X_2 tersebut mempunyai hubungan dan berpengaruh secara signifikan terhadap nilai akhir (Y). Besarnya hubungan tersebut digambarkan dengan model regresi untuk data berdistribusi normal terpotong atas bawah sebagai berikut :

$$Y^* = -0{,}022365 + 1{,}000019X_1 + 1{,}001819X_2 - \sigma\Bigg(\lambda\left(\frac{96-(1{,}000019X_1+1{,}001819X_2)}{\sigma}\right) - \lambda\left(\frac{44-(1{,}000019X_1+1{,}001819X_2)}{\sigma}\right)\Bigg)$$

dengan $Y^* = Y|44 < Y < 96$.

e-ISSN: 2528-4231
p-ISSN: 2776-480X

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Witte, J. S., Greenland, S., Haile, R. W., & Bird, C. L. (1994). Hierarchical regression analysis applied to a study of multiple dietary exposures and breast cancer. *Epidemiology*, 612-621.

[2] Patil, K. R., & Mody, R. N. (2005). Determination of sex by discriminant function analysis and stature by regression analysis: a lateral cephalometric study. *Forensic science international*, 147(2-3), 175-180.

[3] Chantapong, S. (2005). Comparative study of domestic and foreign bank performance in Thailand: The regression analysis. *Economic Change and Restructuring*, 38(1), 63-83.

[4] Amemiya, T. (1973). Regression analysis when the dependent variable is truncated normal. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 997-1016.

[5] Elhai, J. D., Calhoun, P. S., & Ford, J. D. (2008). Statistical procedures for analyzing mental health services data. *Psychiatry research*, 160(2), 129-136.

[6] Herrhyanto, N. (2013). *Statistika Inferensial secara Teoritis*. Bandung: Yrama Widya.