Art Gallery Problem Untuk 1-*Guarded Guards* dan 2-*Guarded Guards* pada Poligon Orthogonal

Elisabet Ivanna Grace Handayani*, Kartika Yulianti dan Khusnul Novianingsih

Departemen Pendidikan Matematika
Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Pendidikan Indonesia
*Surel: ivannagrace@upi.edu

ABSTRAK. *Art Gallery Problem for k-guarded guards* adalah masalah penentuan jumlah minimal penjaga yang dapat melihat k penjaga lainnya (*k-guarded guards*) dan dapat mengawasi seluruh bagian poligon dengan n simpul. Penempatan *k-guarded guards* diperlukan untuk meningkatkan pengawasan suatu ruangan dari pencurian yang bukan hanya berasal dari pengunjung luar, tetapi juga dari penjaga. Penelitian ini membahas *art gallery problem for k-guarded guards* pada poligon orthogonal untuk $k = 1$ dan $k = 2$. Untuk $k = 1$ yang dikenal dengan *art gallery problem for 1-guarded guards*, masalah telah diselesaikan melalui konsep pewarnaan graf. Pada penelitian ini dikontruksi teorema baru melalui konsep yang sama sebagai penyelesaian untuk $k = 2$. Selanjutnya, penempatan *1-guarded guards* diimplementasikan pada suatu toserba di kota Bandung.

Kata kunci: *Art gallery problem for guarded guards, art gallery problem for 2-guarded guards,* poligon orthogonal, pewarnaan graf

e-ISSN: 2528-4231
p-ISSN: 2776-480X

Art gallery problem for 1-guarded guards and 2-guarded guards on orthogonal polygons

ABSTRACT. *Art Gallery problem for k-guarded guards is the problem to find the minimum number of k-guarded guards that are always sufficient and sometimes necessary to protect a polygon with n vertices. A k-guarded guard is a guard that can see k other guards. Placing k-guarded guards are required to increase rooms protection from the theft that may be not only visitors but also guards. This research discuss about art gallery problem for k-guarded guards in orthogonal polygon for* $k = 1$ *and* $k = 2$. *For* $k = 1$ *which is known by art gallery problem for 1-guarded guards was solved using graph coloring arguments. In this research, we constructed a new theorem to settle the problem for* $k = 2$. *The placement 1-guarded guards was implemented in a department store in Bandung.*

Keywords: *Art gallery problem for guarded guards, art gallery problem for 2-guarded guards, orthogonal polygon, graph coloring*.

1. PENDAHULUAN

Art Gallery Problem, menurut Chvátal [1], merupakan suatu masalah untuk menentukan jumlah penjaga yang cukup agar sejumlah penjaga tersebut dapat mengawasi seluruh bagian dari suatu ruangan. Ruang dari suatu *art gallery* direpresentasikan sebagai poligon dengan sejumlah simpul, dimana simpul akan menjadi simpul penempatan dari setiap penjaga. Worman dan Keil [2] membahas dekomposisi poligon.

Art Gallery Problem telah berkembang dengan beberapa variasi termasuk di antaranya dekomposisi poligon dan *Art Gallery Problem for k-guarded guards.* Dekomposisi poligon banyak dibahas dalam berbagai artikel termasuk diantaranya dibahas oleh Worman dan Keil [2]. Adapun variasi lainnya yakni *Art Gallery Problem for k-guarded guards* mengembangkan masalah penempatan penjaga agar setiap penjaga bukan hanya mengawasi seluruh bagian ruangan tetapi setiap penjaga juga akan diawasi dan mengawasi penjaga lainnya. Secara geometri, ini berarti bahwa setiap penjaga harus dapat melihat sejumlah penjaga lainnya. Bilangan k pada *k-guarded guards* menunjukan jumlah minimal dari banyaknya penjaga yang harus dapat dilihat oleh setiap penjaga.

Sistem *k-guarded guards* sangat dibutuhkan dalam berbagai kasus, terutama kasus ditempatkannya manusia sebagai penjaga. Hal ini dikarenakan kemungkinan adanya pencurian bukan hanya berasal dari pengunjung luar, tetapi juga penjaga yang ditugaskan masih memiliki potensi sebagai pencuri. Kemungkinan ini biasanya terjadi di tempat-tempat dimana penjaga memiliki akses bebas terhadap produk misalnya toserba atau supermarket. Jika tidak terawasi, penjaga dapat mengambil barang di toserba atau supermarket dengan leluasa.

Menurut Michael dan Pincui [3], *Art Gallery Problem for k-guarded guards* pertama kali diperkenalkan oleh Hernández-Peñalver pada tahun 1995 untuk $k = 1$ dengan pembuktian secara induksi untuk seluruh poligon secara umum. Pada tahun 2003 Michael dan Pincui mengembangkan penelitian *Art Gallery Problem untuk 1-guarded guards* pada poligon orthogonal. O'Rourke, J [4] menjelaskan bahwa poligon orthogonal adalah poligon yang memiliki sisi yang sejajar dengan pasangan sumbu koordinat kartesius yang saling tegak lurus membentuk sudut dalam sebesar $90°$ atau $270°$. Michael dan Pincui [3] memberikan pembuktian dengan konsep pewarnaan graf sehingga alur pembuktiannya dapat digunakan untuk memilih lokasi penempatan penjaga pada poligon orthogonal.

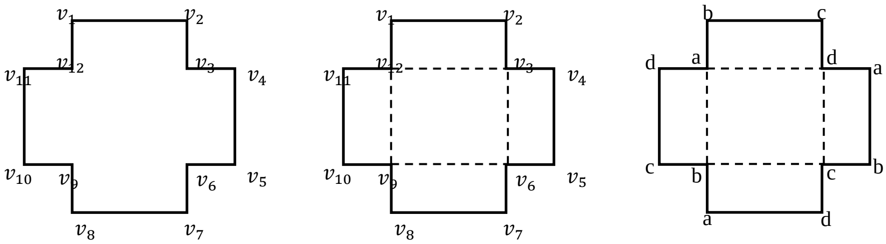
Berdasarkan penelusuran penulis, penulis tidak menemukan penelitian yang mengangkat penyelesaian *art gallery problem for k-guarded guards* pada

e-ISSN: 2528-4231
p-ISSN: 2776-480X

poligon orthogonal untuk $k \geq 2$. Melalui penelitian ini, *Art Gallery Problem for 2-guarded guards* pada poligon orthogonal diselesaikan dalam sebuah teorema baru dan diberikan contoh implementasi *Art Gallery Problem for 1-guarded guards* pada poligon orthogonal untuk menentukan jumlah *1-guarded guards* dan penempatannya pada salah satu toserba di kota Bandung.

2. METODOLOGI

Penelitian ini bertujuan untuk mengkontruksi penyelesaian *art gallery problem for k-guarded guards* untuk $k = 1$ dan $k = 2$. Penyelesaian tersebut dinyatakan dalam sebuah teorema dimana alur pembuktian teorema tersebut dapat digunakan sebagai algoritma untuk menentukan lokasi penempatan penjaga pada poligon orthogonal P_n. Sebagai contoh, misal terdapat suatu ruangan yang berbentuk poligon P_{12}. Poligon P_{12} melalui 4 tahapan yaitu quadrangulasi, triangulasi, pewarnaan graf dan *shifting* yang ditunjukkan dalam *teorema art gallery problem for k-guarded guards*.



Gambar 1. Poligon P_{12}

Teorema *art gallery problem for k-guarded guards* akan menunjukan bahwa untuk $k = 1$, menempatkan 4 penjaga cukup untuk menjaga seluruh daerah poligon dengan setiap penjaga diawasi minimal satu penjaga lainnya, contohnya penjaga ditempatkan pada titik v_2, v_8, v_5, dan v_{11}. Sementara untuk $k = 2$, menempatkan 7 penjaga cukup untuk menjaga seluruh daerah poligon dengan setiap penjaga diawasi setidaknya dua penjaga lainnya. Namun dengan penempatan yang tepat, dua orang 1-*guarded guards* (misalnya ditempatkan pada titik v_3 dan v_9) dan tiga orang 2-*guarded guards* saja (misalnya ditempatkan pada titik v_3, v_6, dan v_9) sudah cukup untuk menjaga poligon P_{12}. Penempatan tersebut diperoleh dengan mengimplementasikan alur pembuktian teorema *art gallery problem for k-guarded guards* untuk $k = 1$ dan $k = 2$ sebagai algoritma untuk memperoleh penempatan dan jumlah penjaga yang optimal. Penyelesaian teorema *k-guarded guards* dibuktikan melalui dua teorema berikut:

1. Teorema Art Gallery Problem

Pada tahun 1975, Václav Chvátal berhasil menjawab masalah *Art Gallery* dengan menyatakan sebuah teorema yang kini dikenal sebagai *art gallery theorm* atau Teorema Chvátal[1]. Pembuktian Chvátal dilakukan dengan konsep induksi yaitu membentuk triangulasi dan melakukan pemotongan untuk langkah induksinya. Fisk [5] menemukan pembuktian yang lebih sederhana menggunakan konsep triangulasi dan *3-coloring* yang dituliskan sebagai berikut:

Teorema. Jika P adalah poligon dengan n simpul, maka terdapat himpunan $\mathcal{G}$ dengan jumlah anggota paling banyak $\frac{n}{3}$, sedemikian sehingga untuk setiap simpul $p \in P$ akan terdapat $q \in \mathcal{G}$ dengan ruas garis $pq \in P$.

Bukti: Triangulasikan P tanpa menambahkan simpul baru. Setiap triangulasi dapat diwarnai oleh tiga warna yaitu $\mathrm{a, b, c}$. Misalkan $\mathrm{V_k}$ merupakan himpunan simpul yang diwarnai oleh warna k, dan anggap bahwa $|\mathrm{V_a}| \leq |\mathrm{V_b}| \leq |\mathrm{V_c}|$. Dipilih $\mathcal{G} = \mathrm{V_a}$ yang berarti $|\mathcal{G}| \leq \frac{\mathrm{n}}{3}$. Akibatnya, setiap simpul $\mathrm{q} \in P_n$ terletak pada suatu triangular dari T, dan setiap triangular dari T memuat simpul $\mathrm{p} \in \mathcal{G}$. Karena setiap triangular adalah convex maka $\mathrm{pq} \in P$.

2. Teorema Art Gallery Problem pada Poligon Orthogonal

Penyelesaian *art gallery problem* pada poligon orthogonal dilakukan dengan memodifikasi konsep pewarnaan pada pembuktian Fisk. Michael [6] menyatakan penyelesaian tersebut ke dalam teorema berikut.

Teorema. Sebanyak $\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor$ penjaga selalu cukup untuk menjaga suatu *art gallery* berbentuk orthogonal dengan n simpul, dimana $n = 4, 6, 8, \ldots$

Bukti: Misalkan P_n merupakan poligon orthogonal. Kontruksi graf quadrangulasi Q_n dan quadrangulasi F dari poligon P_n. Setiap quadrilateral pada Q_n dapat diwarnai oleh 4 warna, yaitu a, b, c, dan d. Misalkan $\mathrm{V_k}$ merupakan himpunan simpul yang diwarnai oleh warna k, dan anggap bahwa $|\mathrm{V_a}| \leq |\mathrm{V_b}| \leq |\mathrm{V_c}| \leq |V_d|$. Dipilih $\mathcal{G} = \mathrm{V_a}$ yang berarti $|\mathcal{G}| \leq \frac{\mathrm{n}}{4}$. Akibatnya, setiap quadrilateral pada Q_n memuat paling tidak sebuah simpul $\mathrm{g} \in \mathcal{G}$. Karena Q_n memuat semua simpul dari P_n maka terbukti bahwa setiap simpul $p \in P_n$ terlihat oleh satu penjaga di suatu quadrilateral pada Q_n.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Teorema Art Gallery Problem for guarded guards

Penyelesaian *guarded guards* pada poligon orthogonal dinyatakan dalam teorema yang dibuktikan dengan menggunakan konsep pewarnaan graf yang hampir sama dengan pembuktian Teorema *Art Gallery Problem*, namun dengan adanya sedikit modifikasi.

Teorema. Suatu poligon orthogonal P_n cukup dijaga oleh $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ orang *guarded guards*.

Bukti: Pembuktian cukup dilakukan dengan menunjukan bahwa teorema ini berlaku untuk graf quadrangulasi Q_n bagi P_n. Hal ini dikarenakan setiap simpul pada Q_n kongruen dengan simpul pada P_n. Misalkan $\mathcal{G}$ merupakan himpunan penjaga untuk poligon P_n. Maka akan ditunjukan bahwa $|\mathcal{G}| \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ dan $\mathcal{G}$ merupakan himpunan *guarded guards*.

Langkah awal pembuktian ini adalah dengan mengkontuksi graf triangulasi T_n dari graf quadrangulasi Q_n. Quadrangulasikan P_n tanpa menambahkan simpul baru. Selanjutnya, setiap quadrilateral $f \in F$ dan simpul $v \in Q_n$ diwarnai dengan *2-coloring* sehingga setiap quadrilateral dan simpul bertetangga selalu memiliki warna berbeda. Graf triangulasi T_n dikontruksi dengan menghubungkan dua simpul yang memiliki warna sama dengan warna quadrilateral yang memuat kedua simpul tersebut. Semua diagonal *non crossing* yang membentuk graf triangulasi dari graf quadrangulasi ini didefinisikan sebagai suatu himpunan diagonal E.

Graf triangulasi T_n yang terbentuk memiliki dua karakteristik yaitu:

1. Sembarang dua diagonal $(w, v) \in E$ dan $(w, u) \in E$ akan berinsiden di simpul E jika quadrilateral yang memuat (w, v) dan (w, u) tidak saling bertetangga.
2. Setiap simpul berderajat tiga pada graf triangulasi T_n merupakan simpul yang berinsiden dengan dua sisi poligon dan sebuah diagonal E.

Berdasarkan Teorema *Art Gallery Problem*, maka graf triangulasi T_n cukup dijaga oleh $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ penjaga, yaitu himpunan $\mathcal{G}$. Misalkan $Y = \{y \in \mathcal{G} \mid \deg(y) = 3\}$ dan $Y^c = \{y \in \mathcal{G} | \deg(y) \neq 3\}$. Maka $\mathcal{G} = Y^c \cup Y$. Berdasarkan karakteristik kedua dari graf triangulasi T_n, maka setiap simpul pada $y \in Y$ akan bertetangga pada tepat satu simpul pada $y^* \in Y^*$ sedemikian sehingga $(y, y^*) \in E$. Jika penjaga pada $y \in Y$ digeser sepanjang diagonal (y, y^*) sehingga y^* menjadi simpul penjaga menggantikan y maka terbentuk himpunan penjaga $\mathcal{G}$ menjadi $\mathcal{G} = Y^c \cup Y^*$ tanpa merubah keterjagaan karena y dan y^* berada pada triangular dan quadrilateral yang sama.

Langkah selanjutnya ialah membuktikan bahwa $\mathcal{G}$ merupakan *guarded guards*. Karena $\mathcal{G} = Y^c \cup Y^*$ maka pembuktian akan ditunjukkan dalam dua kasus yaitu untuk $x \in Y^c$ dan $x \in Y^*$.

Kasus pertama, misalkan $x \in Y^c$. Maka x akan termuat pada suatu $f \in F$ yang memuat diagonal $e \in E$ tetapi $x \in f$ tidak berinsiden dengan $e \in f$. Dalam $f \in F$, x akan berseberangan dengan suatu simpul $x' \in f$ yang memiliki warna yang sama ketika tahap *3-coloring*. Ini berarti, x' merupakan simpul penjaga. Karena x dan x' merupakan simpul penjaga yang berada pada f yang sama, maka $x \in Y^c \subset \mathcal{G}$ merupakan *guarded guards*.

Kasus kedua, misalkan $x \in Y^*$ dan terdapat $x', x'' \in P$ dengan $x \neq x'$, $x \neq x''$ dan $x' \neq x''$. Maka jelas bahwa x bertetangga dengan simpul $y \in Y$ dimana $\deg(y) = 3$. Akibatnya, y dan x memiliki warna yang berbeda ketika tahap *3-coloring* dan tidak mungkin $\deg(x) = 3$. Jelas bahwa x dan y termuat pada suatu $f_1 \in F$, namun x juga termuat pada suatu $f_2 \in F$ sehingga x berinsiden dengan $x' \in f_2$ dan $x'' \in f_2$ yang jelas memiliki warna berbeda dengan x ketika tahap *3-coloring*. Salah satu diantara x' dan x'' pasti memiliki warna yang sama dengan y. Tanpa mengurangi keumuman, asumsikan bahwa x' merupakan simpul yang miliki warna sama dengan y. Akibatnya, x' merupakan simpul penjaga. Karena x dan x' merupakan simpul penjaga yang berada pada f yang sama yaitu $f_2 \in F$, maka $x \in Y^* \subset \mathcal{G}$ merupakan *guarded guards*.

Berdasarkan penjelasan pada kedua kasus tersebut diperoleh bahwa $x \in Y^*$ merupakan *guarded guards* dan $x \in Y^c$ juga merupakan *guarded guards* sedemikian sehingga $\mathcal{G}$ merupakan *guarded guards* dengan $|\mathcal{G}| = |Y^c \cup Y^*| = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$. Akibatnya, Teorema *Art Gallery Problem for guarded guards* terbukti.

2. Teorema *Art Gallery Problem for 2-guarded guards*

Berdasarkan penyelesaian *art gallery problem for 1-guarded guards* penulis menyelesaikan *art gallery problem for 2-guarded guards* pada poligon orthogonal dengan mengkontruksi teorema baru sebagi berikut.

Teorema. Suatu poligon orthogonal P_n cukup dijaga oleh $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ penjaga
2-guarded guards.

Bukti: Misalkan $\mathcal{G}$ merupakan himpunan penjaga untuk poligon P_n. Untuk membuktikan ini maka akan ditunjukkan bahwa $|\mathcal{G}| \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ dan $\mathcal{G}$ merupakan himpunan *2-guarded guards*. Berdasarkan Teorema *Art Gallery Problem for guarded guards*, poligon P_n memiliki suatu himpunan penjaga $\mathcal{G}_1$ yang merupakan *guarded guards* dengan $|\mathcal{G}_1| \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$. Hal ini berarti bahwa, sejumlah $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ penjaga sudah dapat melihat minimal satu penjaga lainnya. Oleh karena itu, satu penjaga baru harus ditambahkan agar setiap penjaga dapat melihat minimal dua penjaga lainnya. Berdasarkan Teorema *Art Gallery Problem* Pada Poligon Orthogonal, diperoleh himpunan penjaga $\mathcal{G}_2$ dengan $|\mathcal{G}_2| \leq \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$. Jika himpunan penjaga baru $\mathcal{G}_2$digabungkan dengan himpunan *guarded guards* $\mathcal{G}_1$ maka terdapat himpunan penjaga $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$, dimana $|\mathcal{G}| \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$.

Untuk $\mathcal{G}_2$ didefinisikan $X = \{x \in \mathcal{G}_2 \mid x \in T_n, \deg(x) \leq 3\}$ dan $X^c = \{x \in \mathcal{G}_2 \mid x \in T_n, \deg(x) > 3\}$. Maka $\mathcal{G}_2 = X^c \cup X$. Berdasarkan karakteristik kedua dari graf triangulasi T_n maka setiap penjaga simpul pada $x \in X$ akan bertetangga dengan tepat satu penjaga simpul pada $x^* \in X_1^*$ sedemikian sehingga $(x, x^*) \in E$ dimana simpul $x^* \in X_1^*$. Sementara itu, simpul berderajat dua pada himpunan X akan berseberangan dengan tepat satu simpul pada $x^* \in X_2^*$ yang memiliki warna yang sama ketika proses pemberian tiga warna. Penjaga yang ditempatkan pada simpul dalam himpunan X akan dipindahkan ke masing-masing pasangan simpul X di X^* tanpa merubah keterjagaan, dimana $X^* = X_1^* \cup X_2^*$. Akibatnya, himpunan penjaga $\mathcal{G}_2$ menjadi $\mathcal{G}_2 = X^* \cup X^c$ dan derajat simpul yang ditempati setiap penjaga $x \in \mathcal{G}_2$ berderajat lebih dari tiga.

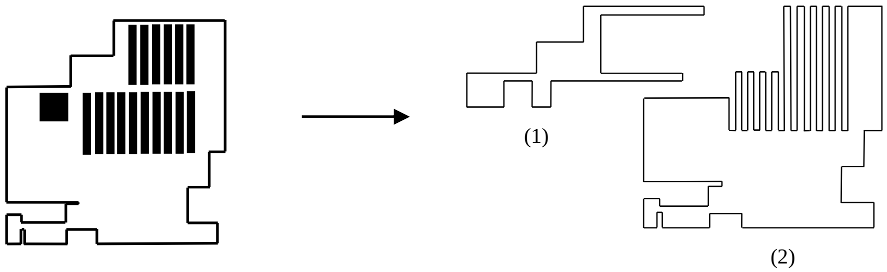
Langkah selanjutnya ialah membuktikan bahwa himpunan penjaga $\mathcal{G}$ merupakan himpunan *2-guarded guards*. Karena $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ maka pembuktian dapat dinyatakan dalam dua kasus yaitu untuk $x \in \mathcal{G}_1$ a dan $x \in \mathcal{G}_2$.

Kasus pertama, untuk $x \in \mathcal{G}_1$. Karena $\mathcal{G}_1$ merupakan himpunan *guarded guards* maka $x \in \mathcal{G}_1$ termuat pada suatu quadrilateral $f \in F$ yang memuat $x' \in \mathcal{G}_1$ sehingga $x \in \mathcal{G}_1$ dan $x' \in \mathcal{G}_1$ dapat saling melihat. Di sisi lain, setiap quadrangulasi memuat suatu $x'' \in \mathcal{G}_2$. Maka $x \in \mathcal{G}_1$ dan $x'' \in \mathcal{G}_2$ dapat saling melihat pada quadrilateral $f \in F$. Akibatnya, pada suatu quadrilateral $f \in F$, $x \in \mathcal{G}_1$ termuat bersama $x' \in \mathcal{G}_1$ dan $x'' \in \mathcal{G}_2$. Hal ini berarti simpul penjaga $x \in \mathcal{G}_1$ dapat melihat simpul penjaga $x' \in \mathcal{G}_1$ dan $x'' \in \mathcal{G}_2$, sehingga $x \in \mathcal{G}_1$ merupakan *2-guarded guards*.

Kasus kedua, untuk $x \in \mathcal{G}_2$. Jika $x \in \mathcal{G}_2$ berada pada simpul yang sama dengan simpul yang ditempati oleh suatu penjaga $x' \in \mathcal{G}_1$, maka $x \in \mathcal{G}_2$ merupakan *2-guarded guards* karena $x \in \mathcal{G}_2$ dan $x' \in \mathcal{G}_1$ dapat saling melihat dan $x \in \mathcal{G}_2$ dapat saling melihat dengan suatu $x'' \in \mathcal{G}_1$ yang dapat saling melihat dengan $x' \in \mathcal{G}_1$. Jika penjaga $x \in \mathcal{G}_2$ tidak menempati simpul yang ditempati oleh suatu penjaga $x' \in \mathcal{G}_1$, maka $x \in \mathcal{G}_2$ akan berinsiden dengan suatu diagonal $e \in E$ pada suatu quadrangulasi $f \in F$. Pada quadrilateral tersebut, $x \in \mathcal{G}_2$ akan saling melihat dengan $x' \in \mathcal{G}_1$ dan $x'' \in \mathcal{G}_1$ yang saling berseberangan. Begitu pula untuk $x \in X^c$, karena $x \in X^c$ berderajat lebih dari tiga maka $x \in X^c$ akan saling melihat dengan $x' \in \mathcal{G}_1$ dan $x'' \in \mathcal{G}_1$ pada suatu quadrilateral *f*.

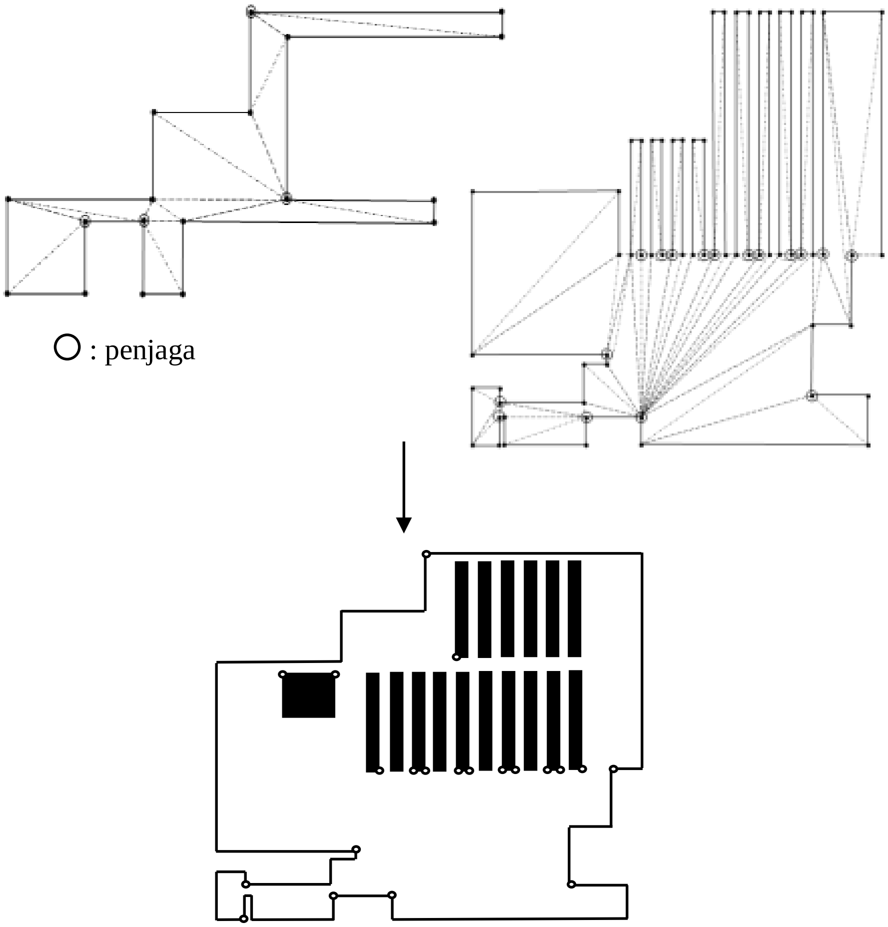
Berdasarkan penjelasan pada kedua kasus tersebut diperoleh bahwa $x \in \mathcal{G}_1$ merupakan *2-guarded guards* dan $x \in \mathcal{G}_2$ juga merupakan *2-guarded guards* sedemikian sehingga $\mathcal{G}$ merupakan *2-guarded guard*, dengan $|\mathcal{G}| \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$. Akibatnya, Teorema *Art Gallery Problem for 2-guarded guards* terbukti.

3. Implementasi penempatan *guarded guards* pada salah satu toserba di Bandung



Gambar 2. Partisi Poligon dari denah toserba X

e-ISSN: 2528-4231
p-ISSN: 2776-480X



Gambar 3. Penempatan Penjaga di Toserba X

Teorema *Art Gallery Problem for guarded guards* pada poligon orthogonal diimplementasikan pada suatu denah toserba di kota Bandung. Untuk dapat mengimplementasikan teorema *Art Gallery for guarded guards*, denah toserba X dipartisi menjadi beberapa poligon. Dalam penelitian ini, partisi denah toserba X dipartisi menjadi dua poligon yaitu P_{18} dan P_{66}. Menurut teorema *Art Gallery Problem for guarded guards*, P_{18} cukup dijaga oleh 6 *guarded guards* dan P_{66} cukup dijaga oleh 22 *guarded guards*. Masing-masing poligon melalui proses quadrangulasi, triangulasi, *3-coloring* dan *shifting*. Berdasarkan hasil yang diperoleh setelah melewati seluruh tahapan penempatan *guarded guards*, P_{18} dan P_{66} yang terbentuk cukup dijaga oleh 4 orang 1-*guarded guards* dan 17 orang 1-*guarded guards*. Berdasarkan hasil yang diperoleh, denah toserba X cukup dijaga oleh 21 *guarded guards* dengan penempatan seperti pada Gambar 3.

4. KESIMPULAN

Art gallery problem for k-guarded guards adalah masalah menentukan jumlah minimum penjaga pada suatu ruangan berbentuk poligon dengan n simpul sehingga seluruh interior ruangan dapat terawasi dan setiap penjaga dapat melihat minimal sejumlah k penjaga lainnya. Pada penelitian ini, poligon yang digunakan merupakan poligon orthogonal yaitu poligon yang sisi-sisinya dapat digambarkan dalam oleh sejumlah pasangan koordinat kartesius dimana sisi-sisinya membentuk sudut $90°$ dan $270°$.

Berdasarkan hasil pembahasan, *art gallery problem for k-guarded guards* untuk $k = 1$ pada suatu poligon orthogonal P_n selalu cukup menempatkan $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ penjaga yang dapat menjaga seluruh bagian interior dan melihat minimal satu penjaga lainnya. Penjaga tersebut disebut *guarded guards.* Sedangkan untuk $k = 2$, poligon P_n selalu cukup ditempatkan $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ penjaga yang dapat menjaga seluruh bagian interior dan melihat minimal dua penjaga lainnya. Penjaga tersebut disebut sebagai *2-guarded guards.*

Penempatan *k-guarded guards* dapat dilakukan dengan menggunakan alur pembuktian untuk masing-masing teorema *art gallery problem for k-guarded guards* untuk $k = 1$ dan $k = 2$. Pada penelitian ini, masalah penentuan penjaga *k-guarded guards* diimplementasikan untuk menentukan jumlah *guarded guards* pada toserba X. Jumlah *guarded guards* yang diperoleh ialah 21 penjaga.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Chvátal, V. (1975). A combinatorial theorem in plane geometry. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, *18*(1), 39-41.

[2] Worman, C., & Keil, J. M. (2007). Polygon decomposition and the orthogonal art gallery problem. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, *17*(02), 105-138.

[3] Michael, T. S., & Pinciu, V. (2003). Art gallery theorems for guarded guards. *Computational Geometry*, *26*(3), 247-258.

[4] O'Rourke, J. (1987). *Art Gallery Theorems and Algorithms.* New York: Oxford University Press, Inc.

[5] Fisk, S. (1977). A Short Proof of Chvatal's Watchman Theorm. *Combinatorial Theory B 24*, 374.

[6] Michael, T. (2009). *How to Guard an Art Gallery and Other Discrete Mathematical Adventures.*