

Model Matematika Fluida Lapisan Tipis Pada Bidang Miring

Hamdan Anshory Martanegara*, Kartika Yulianti, Isnie Yusnitha

Departemen Pendidikan Matematika
Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Pendidikan Indonesia

*Surel: hamdananshorym@gmail.com

ABSTRAK. Fluida lapisan tipis adalah fluida dengan kondisi perbandingan tinggi fluida dan panjang fluida yang sangat kecil, sehingga komponen kecepatan arah vertikal dapat diabaikan. Pada artikel ini dipaparkan sebuah model matematika fluida lapisan tipis jenis Newtonian dan non-Newtonian pada bidang miring. Model matematika ini berupa sistem persamaan diferensial parsial yang terdiri dari dua persamaan pembangun, yaitu persamaan Navier-Stokes dan persamaan kontinuitas. Dengan metode penskalaan, parameter-parameter yang berorde kecil dapat diabaikan, sehingga diperoleh persamaan yang menggambarkan perubahan ketinggian fluida lapisan tipis. Solusi numerik diperoleh dengan metode beda hingga. Pada penelitian ini, simulasi dilakukan dengan beberapa nilai kemiringan dan jenis fluida. Hasil simulasi menunjukkan bahwa perbedaan kemiringan dan jenis fluida menyebabkan perbedaan pada pergerakan aliran fluida.

Kata Kunci: fluida lapisan tipis, Newtonian, Non-Newtonian, bidang miring, metode beda hingga

Mathematical Model Thin Film Fluid on An Incline

ABSTRACT. *Thin film fluid is a fluid with condition the ratio of height and the length of the fluid is very small, so the vertical direction velocity component can be ignored. In this study, we construct a mathematical model of Newtonian and non-Newtonian thin film fluid model on an incline. The model is a system of partial differential equation which consists of the Navier Stokes's equation and the continuity equation. By the scaling method, parameters with small order are reduced, so we obtain equations for change of height of the thin film fluid. The finite difference method is used to find numerical solutions of the thin film fluid model. In this study, several simulations are conducted for Newtonian and non-Newtonian fluid in various slope of incline plane. Results show that differences in slope and type of fluid cause differences in fluid flow.*

Keywords: *thin film fluid, Newtonian, non-Newtonian, incline plane, finite difference method*

1. PENDAHULUAN

Fluida adalah zat atau subsistem yang akan mengalami deformasi secara berkesinambungan jika terkena gaya geser (gaya tangensial), walaupun gaya tersebut kecil [1]. Sifat ini tentu sangat berbeda dengan sifat zat padat, yang mana jika terkena gaya geser akan menyebabkan terjadinya perubahan bentuk tetapi tidak berkesinambungan. Apabila benda-benda padat biasa seperti baja atau logam-logam lainnya dikenai oleh suatu tegangan geser, mula-mula benda ini akan berdeformasi (biasanya sangat kecil), tetapi tidak akan terus-menerus berdeformasi (mengalir). Namun, cairan yang biasa seperti air, minyak, dan udara memenuhi definisi dari sebuah fluida. Dengan kata lain, zat-zat tersebut akan mengalir apabila padanya bekerja sebuah tegangan geser.

Bila dilihat dari karakteristik deformasi akibat gaya gesernya, fluida dapat dibagi menjadi dua yakni Newtonian dan non-Newtonian. Picchi, dkk [2] menyebutkan fluida Newtonian adalah fluida yang memiliki kurva *shear stress* yang linier. Viskositas fluida ini tidak berubah ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida tersebut. Sedangkan fluida non-Newtonian adalah fluida yang berubah tergantung gaya yang memengaruhinya. Fluida non-Newtonian ini tidak mengikuti hukum Newton tentang aliran. Sebagai contoh dari fluida non-Newtonian ini antara lain cat, minyak pelumas, lumpur, darah, obat-obatan cair, dan bubur kertas.

Ditinjau dari aspek geometris, salah satu jenis fluida adalah fluida lapisan tipis. Fluida lapisan tipis adalah fluida yang ketinggiannya jauh lebih kecil dibandingkan panjang fluidanya. Perazzo [3] mengungkapkan bahwa fluida lapisan tipis pada sebuah bidang merupakan fenomena penting baik di alam ataupun industri. Fenomena fluida lapis tipis terjadi pada aliran lava, lapisan paru-paru mamalia, lapisan airmata pada bolamata. Di dalam industri dapat ditemukannya pada pembuatan mikrochip dan berbagai jenis pelapisan/pegecatan.

Dengan memodelkan dan mensimulasikan fluida lapisan tipis akan didapat solusi ketinggian fluida pada posisi dan waktu tertentu. Selain itu, dengan pemodelan dapat dicegah ketidakefektifan pada proses pengecatan mobil dan menentukan batas ketebalan cat pada dinding maupun langit-langit.

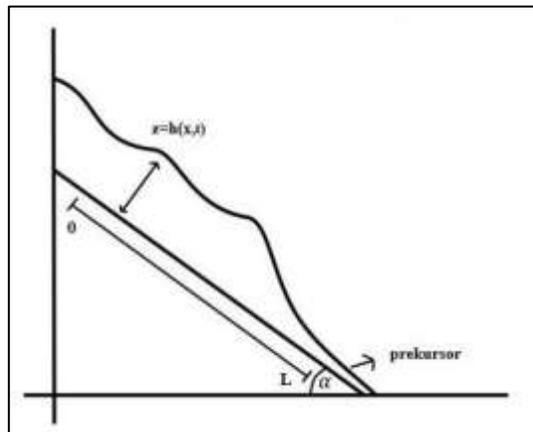
Permukaan tiap benda memiliki karakteristik masing-masing yang akan memberikan model fluida lapisan tipis yang berbeda, contohnya fluida lapisan tipis pada bidang miring akan berbeda dengan fluida lapisan tipis pada bidang vertikal ataupun pada bidang lengkung. Contoh fluida lapisan tipis pada bidang miring yaitu pengecatan pada bangunan yang miring, pelapisan mesin-mesin pada industri. Kajian ini cukup menarik karena jika dilihat manfaat pada permasalahan produksi, khususnya skala besar yang membutuhkan efisiensi bahan, model lapisan tipis fluida pada bidang miring dapat membantu memberikan hasil yang

efisien karena di dalamnya sudah berlaku hukum-hukum fisika yaitu hukum kekekalan massa dan hukum kekekalan momentum. Dua hukum ini menjadi acuan dasar untuk menghasilkan persamaan pembangun yang akan dikembangkan menjadi model lapisan tipis fluida pada bidang miring.

Beberapa penelitian sebelumnya yang membahas tentang dinamika fluida lapis tipis pada bidang miring, antara lain: Miladinova [4] mempertimbangkan masalah lapisan liquid Power Law yang menuruni lereng dan menunjukkan keberadaan gelombang permanen hingga terbatas. Myers [5] menyelidiki berbagai model reologi dalam konteks aliran film tipis. Penelitian ini membentuk dasar untuk karya Charpin, dkk. [6] yang meneliti penyebaran cairan non-Newtonian dalam konteks putaran lapisan. Heining dan Aksel [7] meneliti aliran cairan Power-law menuruni lereng bergelombang. Mereka menyelidiki aliran itu secara numerik menggunakan pendekatan lapisan batas integral. Ganguly, dkk [8] yang membahas lapisan liquid yang mengalir menuruni bidang miring menggunakan pendekatan lubrikasi. Pada penelitian ini dikaji secara matematis mengenai aliran fluida lapisan tipis pada bidang miring yang merupakan perumuman karena akan membahas fluida Newtonian dan fluida non-Newtonian, menggunakan sifat Power Law. Selanjutnya, model diselesaikan dengan metode beda hingga, dan ditentukan pengaruh kemiringan bidang dan jenis fluida terhadap ketinggian fluida lapis tipis.

2. MODEL FLUIDA LAPISAN TIPIS PADA BIDANG MIRING

Fluida yang dikaji berada pada suatu daerah tertentu, dinyatakan dalam rentang $[0, L]$. Ketinggian fluida pada titik $x \in [0, L]$ di waktu t dinotasikan $z = h(x, t)$ dan kecepatan fluida yang searah sumbu x di waktu t dinotasikan $u(x, t)$, kecepatan fluida yang searah sumbu z di waktu t dinotasikan $w(x, t)$ α merupakan kemiringan bidang dan g merupakan gaya gravitasi. Ilustrasi terdapat pada gambar (1).



Gambar 1. Model dari fluida lapisan tipis yang mengalir pada bidang miring.

Diasumsikan fluida memiliki kekentalan tinggi sehingga fluida mengalir merayap atau bergerak perlahan, fluida bersifat tidak mampat, suhu dan faktor angin diabaikan, topografi dari bidang miring bersifat tidak bergelombang, dan gaya yang terlibat pada model ini hanyalah gaya gravitasi. Persamaan fluida lapisan tipis pada bidang miring dikonstruksi melalui pendekatan pelumasan yang diperoleh dari penskalaan beberapa persamaan pembangun yakni persamaan Navier Stokes dengan *shear stress* mengikuti hukum Power Law dan hukum persamaan kontinuitas sebagai berikut

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + Q \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^{\frac{1}{\lambda}}}{\partial z} + \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} - \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

dengan p adalah tekanan, Q suatu konstanta, dan λ adalah indeks perilaku aliran. Selanjutnya, dari tiga persamaan tersebut didapatkan model fluida lapisan tipis sebagai berikut

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \left(k\lambda \left(\tan \alpha - \frac{\partial h}{\partial x} \right)^{\lambda-1} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) (h^{\lambda+2}) \right) - \left(k(\lambda+2) \left(\tan \alpha - \frac{\partial h}{\partial x} \right)^{\lambda} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) (h^{\lambda+1}) \right), \quad (4)$$

$$\text{dengan } k = \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1-\lambda}{2\lambda}} \cos \alpha}{\lambda+2}$$

Dalam kajian ini digunakan nilai awal untuk ketinggian fluida berupa fungsi eksponen:

$$h(x, 0) = 0,5e^{-0,25(x-4)^2} + 0,1, \quad (5)$$

dan syarat batas:

$$\frac{\partial h(0, t)}{\partial x} = 0 \text{ dan } h(10, t) = 0,1. \quad (6)$$

Syarat batas (6) menggambarkan bagian awal dan akhir gelombang. Syarat pertama merepresentasikan pada $x = 0$, permukaan fluida lapis tipis adalah selalu bergradien 0. Selanjutnya, syarat batas kedua menunjukkan pada fluida lapis tipis ini terdapat prekursor dengan ketinggian tertentu (dapat dilihat pada gambar 1). Sebagai catatan, prekursor merupakan aliran tipis yang mengalir terlebih dahulu dibanding aliran lainnya. Prekursor pada model ini dipilih 0,1.

3. METODE BEDA HINGGA

Penyelesaian dari persamaan (4) akan dilakukan secara numerik dengan metode beda hingga skema eksplisit. Diskritisasi yang digunakan sebesar $\Delta x = 0.1$ dan $\Delta t = 0.01$. Untuk keperluan simulasi, dipilih domain $x = [0, 10]$, $t = [0, 10]$. Persamaan (4) merupakan PDP orde 2, sehingga dibutuhkan tiga buah titik diskritisasi sebelumnya untuk memperoleh nilai ketinggian pada waktu berikutnya ($h(x, t+1)$). Diskritisasi metode beda hingga pada kajian ini dapat ditulis

$$\frac{\partial h}{\partial t} \approx \frac{h_j^{n+1} - h_j^n}{\Delta t} \quad (7)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} \approx \frac{h_{j+1}^n - h_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \approx \frac{h_{j+1}^n - 2h_j^n + h_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (9)$$

Substitusi persamaan (7), (8), (9) ke persamaan (4) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{h_j^{n+1} - h_j^n}{\Delta t} = & \left(k\lambda \left(\tan \alpha - \frac{h_{j+1}^n - h_{j-1}^n}{2\Delta x} \right)^{\lambda-1} \left(\frac{h_{j+1}^n - 2h_j^n + h_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right) (h^{\lambda+2}) \right) \\ & - \left(k(\lambda + 2) \left(\tan \alpha - \frac{h_{j+1}^n - h_{j-1}^n}{2\Delta x} \right)^\lambda \left(\frac{h_{j+1}^n - h_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) (h^{\lambda+1}) \right). \end{aligned}$$

Selanjutnya persamaan tersebut dinyatakan dalam h_j^{n+1} , menjadi

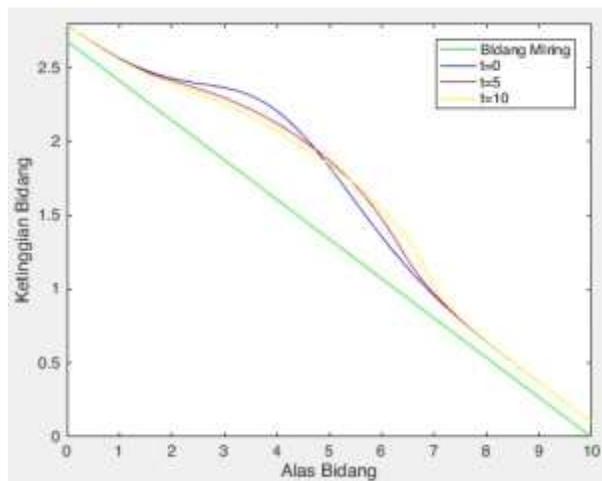
$$\begin{aligned} h_j^{n+1} = h_j^n + & \left(k\lambda\Delta t \left(\tan \alpha - \frac{h_{j+1}^n - h_{j-1}^n}{2\Delta x} \right)^{\lambda-1} \left(\frac{h_{j+1}^n - 2h_j^n + h_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right) (h^{\lambda+2}) \right) \\ & - \left(k(\lambda + 2)\Delta t \left(\tan \alpha - \frac{h_{j+1}^n - h_{j-1}^n}{2\Delta x} \right)^\lambda \left(\frac{h_{j+1}^n - h_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) (h^{\lambda+1}) \right). \end{aligned}$$

4. SIMULASI DAN PEMBAHASAN

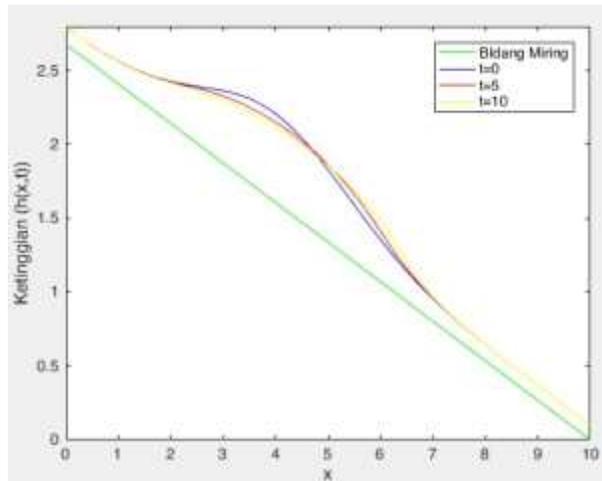
Untuk melihat pengaruh kemiringan (α) dan jenis fluida (λ) terhadap model lapisan tipis fluida pada bidang miring maka pada bagian ini dijelaskan hasil simulasi yang dilakukan dengan program MATLAB.

4.1. Pengaruh Jenis Fluida terhadap Dinamika Aliran Fluida Lapis Tipis

Gambar 2 menampilkan perubahan ketinggian aliran fluida pada kemiringan 15 derajat, untuk fluida jenis pseudoplastik ($\lambda = 0,7 < 1$). Berdasarkan Gambar 2, pada setiap selang waktu terdapat perubahan gelombang yang cukup besar. Pada $t = 0$, puncak ketinggian berada di posisi $x = 4$ kemudian pada $t = 5$ puncak ketinggian sudah bergerak cukup jauh, hingga pada $t = 10$ ia mulai mengarah ke prekursor. Hal ini bersesuaian dengan pernyataan Siregar [9] bahwa fluida pseudoplastik akan mengalami penipisan pergeseran jika viskositas menurun dengan meningkatnya laju geser.

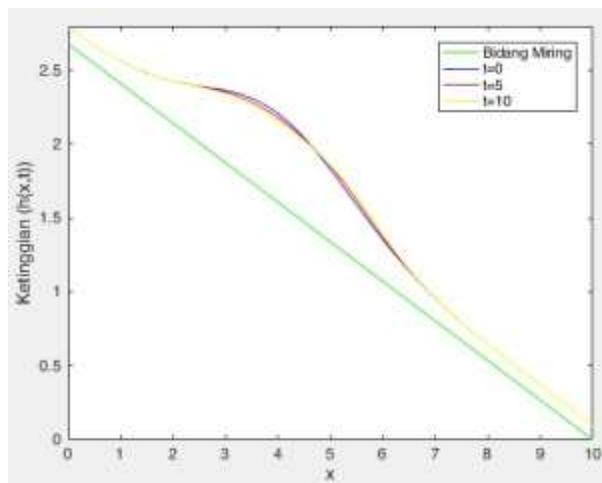


Gambar 2. Simulasi aliran fluida dengan nilai $\lambda = 0,7$ dan $\alpha=15$



Gambar 3. Simulasi aliran fluida dengan nilai $\lambda = 1$ dan $\alpha=15$

Selanjutnya, hasil simulasi fluida Newtonian ($\lambda = 1$) terdapat pada Gambar (3). Berdasarkan Gambar 3, dikarenakan oleh gaya gravitasi, fluida Newtonian mengalir ke arah bawah. Fluida Newtonian mengalir lebih lambat jika dibandingkan dengan fluida pseudoplastik (Gambar 2). Pada $t = 10$, puncak ketinggian fluida belum menuju prekursor.



Gambar 4. Simulasi aliran fluida dengan nilai $\lambda = 1,3$ dan $\alpha=15$

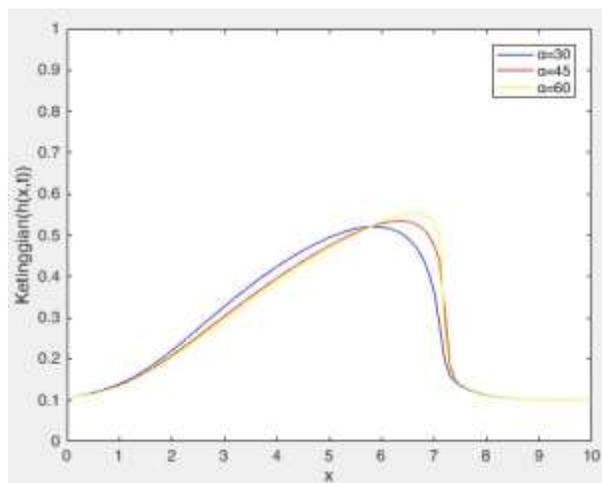
Berbeda dengan fluida pseudoplastik dan fluida Newtonian, dinamika fluida dilatan ($\lambda = 1,3 > 1$) yang ditunjukkan pada Gambar (4) begitu kecil perubahan alirannya. Dapat dilihat pada $t = 0$ hingga $t = 10$ perubahan aliran fluidanya tidak

begitu besar. Siregar [9] mengatakan pada fluida dilatan akan terjadi peningkatan viskositas yang didikasikan dengan adanya peningkatan gaya geser. Contoh fluida dilatan adalah larutan gula pekat dalam air, suspensi pati, pati jagung.

Hasil simulasi untuk beberapa jenis fluida ini sejalan dengan penelitian lain sebelumnya. Ahmed, dkk [10] mengungkapkan bahwa pada bidang yang sama urutan yang akan terlebih dahulu bergerak adalah fluida pseudoplastik dan yang paling lambat adalah fluida dilatan.

4.2. Pengaruh Kemiringan terhadap Dinamika Aliran Fluida Lapis Tipis

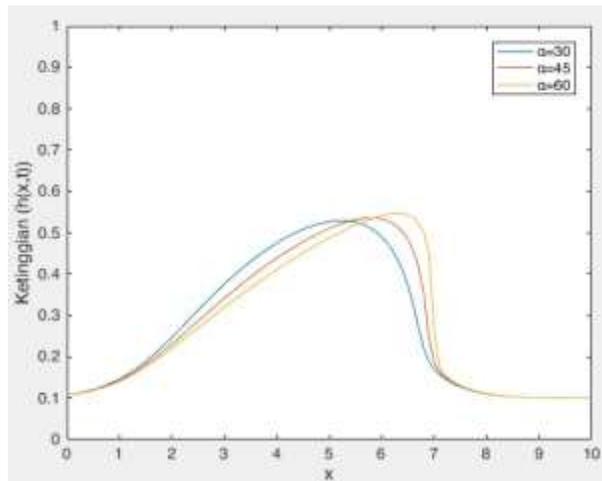
Pada tahap ini, akan ditinjau pengaruh sudut terhadap dinamika fluida lapisan tipis pada bidang miring. Simulasi dilakukan dengan tiga derajat kemiringan yang berbeda yakni, $\alpha = 30$, $\alpha = 45$, $\alpha = 60$. Pada simulasi ini, dipilih domain ruang $x = [0,10]$ dan ditampilkan ketinggian fluida lapis tipis saat $t = 10$. Akan diperlihatkan dengan kondisi jenis fluida pseudoplastik, dilatan, newtonian.



Gambar 5. Perbandingan kemiringan untuk pseudoplastik ($\lambda = 0,7$) pada $t = 10$

Berdasarkan Gambar 5, pada $t=10$ terlihat aliran pseudoplastik yang mengalir pada bidang dengan kemiringan berapapun pada interval $[0,6]$ mengalir dengan gelombang yang cenderung sama. Pada interval setelahnya nampak terlihat perbedaan bentuk gelombang. Aliran fluida dengan kemiringan bidang $\alpha=60$ nampak sangat curam ketika mengalir. Dapat disimpulkan, perubahan aliran pseudoplastik ($\lambda = 0,7$) mendapat dampak signifikan dari kemiringan yang diberikan. Hal ini sesuai dengan karakteristik fluida pseudoplastik, yaitu fluida ini mudah mengalir ketika diberikan gaya.

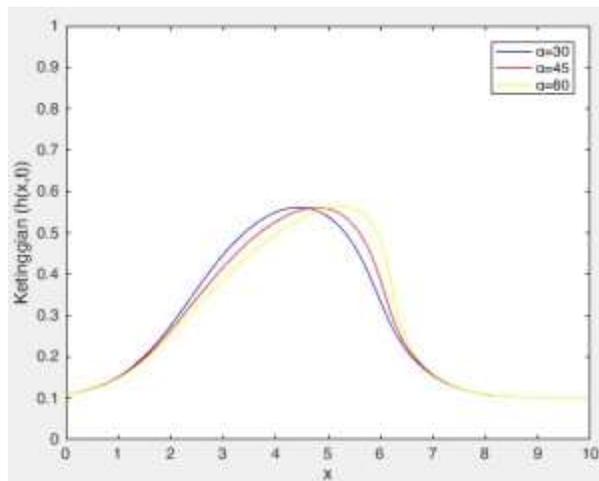
Cat modern adalah contoh bahan pseudoplastik. Ketika cat modern diterapkan, gaya geser yang dibuat oleh kuas atau rol akan memungkinkan mereka untuk menipis dan membasahi permukaan secara merata. Setelah diterapkan, cat mendapatkan kembali viskositasnya yang lebih tinggi, yang menghindari tetesan dan aliran.



Gambar 6. Perbandingan kemiringan untuk fluida Newtonian pada $t = 10$

Berdasarkan Gambar 6, pada $t = 10$ terlihat aliran fluida newtonian yang mengalir pada bidang dengan kemiringan berapapun pada interval $0 < x < 5,5$ mengalir dengan gelombang yang cenderung sama. Pada interval setelahnya nampak terlihat perbedaan bentuk gelombang. Namun berbeda dengan pseudoplastik, pada interval setelahnya memang terdapat kecuraman tapi tak sebesar kecuraman pada aliran pseudoplastik.

Air, alkohol, dan gliserol adalah semua contoh fluida Newtonian pada kisaran tegangan geser dan laju geser yang ditemukan dalam kehidupan sehari-hari. Cairan fase tunggal terdiri dari molekul-molekul kecil yang umumnya (meskipun tidak secara eksklusif) Newtonian.



Gambar 7. Perbandingan kemiringan untuk fluida dilatan ($\lambda = 1,3$) pada $t = 10$

Berdasarkan Gambar 7, dapat dilihat hampir di setiap interval x fluida dilatan dengan nilai $\lambda = 1,3$ menghasilkan gelombang yang cenderung sama di berbagai kemiringan. Hal ini menggambarkan jenis fluida ini tidak terlalu dipengaruhi oleh kemiringan bidang alirnya.

Ada dua jenis penyimpangan dari hukum Newton yang diamati dalam sistem nyata. Deviasi yang paling umum adalah perilaku pseudoplastik, di mana viskositas sistem menurun ketika laju geser meningkat. Kedua adalah dilatan, di mana, ketika laju geser meningkat, viskositas sistem juga meningkat. Perilaku ini diamati karena sistem mengkristal di bawah tekanan dan berperilaku lebih seperti benda padat. Kehadiran partikel tersuspensi sering mempengaruhi viskositas suatu larutan, bahkan dengan partikel yang tepat, cairan Newton dapat menunjukkan perilaku non-Newton. Contohnya adalah tepung jagung dalam air dan termasuk dalam bagian contoh.

Berdasarkan Gambar 5, Gambar 6, dan Gambar 7, dapat dilihat bahwa kemiringan akan berpengaruh pada fluida Newtonian dan fluida pseudoplastik, sedangkan pada fluida dilatan kemiringan tidak terlalu memengaruhi perubahan aliran fluida dilatan tersebut.

4.3 Validasi

Pada tahap ini akan dilakukan validasi solusi numerik fluida lapisan tipis pada bidang miring dengan memastikan hukum kekekalan massanya terpenuhi. Kondisi massa dalam jumlah yang sama bisa terjadi apabila tidak terdapat aliran masuk maupun aliran keluar dari sistem, atau dapat diartikan kecepatan fluida terhadap sumbu- x (u) pada awal domain ($x = 0$) dan akhir domain ($x = 10$) harus

bernilai nol. Akan dibandingkan massa pada waktu $t = 0$ dan $t = 10$ dengan kemiringan bidang $\alpha = 0$. Pada kajian ini, massa berasosiasi dengan luas daerah di bawah kurva solusi. Untuk mencari luas daerah di bawah kurva dilakukan pendekatan numerik yakni dengan menggunakan metode integral trapesium. Dihasilkan luas daerah ketika $t = 0$ yaitu 2,7682 satuan luas, dan luas daerah ketika $t = 10$ yaitu 2,7678. Selisih dua luas tersebut sebesar 0,0004 atau jika dipersentasekan dari luas awal sebesar 0,00015%. Hal ini menunjukkan bahwa solusi numerik yang dibuat dapat dikatakan benar karena memenuhi salah satu prinsip yaitu hukum kekekalan massa.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan permasalahan pada penelitian ini dan uraian pada bab-bab sebelumnya diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Model lapisan tipis fluida pada bidang miring dibangun dari Hukum Kekekalan Momentum (persamaan Navier Stoke) dan Hukum Kekekalan Massa (persamaan kontinuitas) melalui pendekatan lubrikasi. Model tersebut dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \left(k\lambda \left(\tan \alpha - \frac{\partial h}{\partial x} \right)^{\lambda-1} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) (h^{\lambda+2}) \right) - \left(k(\lambda + 2) \left(\tan \alpha - \frac{\partial h}{\partial x} \right)^{\lambda} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) (h^{\lambda+1}) \right)$$

Dengan nilai awal

$$h(x, 0) = 0,5e^{-0,1x^2} + 0,1$$

dan syarat batas

$$\frac{\partial h(0, t)}{\partial x} = 0 \text{ dan } \frac{\partial h(10, t)}{\partial x} = 0.$$

2. Solusi dari model lapisan tipis fluida pada bidang miring menggunakan metode beda hingga menggunakan skema sebagai berikut:

$$h_j^{n+1} = h_j^n + \left(k\lambda \Delta t \left(\tan \alpha - \frac{h_{j+1}^n - h_{j-1}^n}{2\Delta x} \right)^{\lambda-1} \left(\frac{h_{j+1}^n - 2h_j^n + h_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right) (h^{\lambda+2}) \right) - \left(k(\lambda + 2) \Delta t \left(\tan \alpha - \frac{h_{j+1}^n - h_{j-1}^n}{2\Delta x} \right)^{\lambda} \left(\frac{h_{j+1}^n - h_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) (h^{\lambda+1}) \right)$$

3. Berdasarkan hasil simulasi didapatkan bahwa kemiringan memiliki pengaruh terhadap model fluida lapisan tipis. Pada kemiringan $\alpha = 60$ aliran fluida pseudoplastik dan Newtonian memperlihatkan aliran yg lebih curam pada aliran fluida lapisan tipis, sedangkan pada fluida dilatan kemiringan tidak mempengaruhi perubahan ketinggian.

6. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Pozrikidis, C., & Jankowski, D. (1997). *Introduction to theoretical and computational fluid dynamics* (Vol. 675). New York: Oxford university press.
- [2] Picchi, D., Poesio, P., Ullmann, A., & Brauner, N. (2017). Characteristics of stratified flows of Newtonian/non-Newtonian shear-thinning fluids. *International Journal of Multiphase Flow*, 97, 109-133.
- [3] Perazzo, C. A., & Gratton, J. (2003). Thin film of non-Newtonian fluid on an incline. *Physical Review E*, 67
- [4] Miladinova (2004). Thin-film flow of a power-law liquid falling down an inclined plate. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 122(1), 69-78.
- [5] Myers, T. G. (2005). Application of non-Newtonian models to thin film flow. *Phys. Rev. E*. 72, 066302.
- [6] Charpin, J. P. F., Lombe, M., & Myers, T. G. (2007). Spin coating of non-Newtonian fluids with a moving front. *Phys. Rev. E*. 76, 016312.
- [7] Heining, C. & Aksel, N. (2010). Effects of inertia and surface tension on a power-law fluid flowing down a wavy incline. *International Journal of Multiphase Flow*, 36, hlm. 847–857.
- [8] Ganguly, A., Reza, M., & Gupta, A. S., (2012). Thin-Film Flow of a Power-Law Fluid Down an Inclined Plane, *Journal of Fluids Engineering*, 134(4), 044502.
- [9] Siregar, M. (2014). *Persamaan Pembentuk Aliran*. Jakarta: Universitas Indonesia.
- [10] Ahmed, Gulraiz dkk (2015), Rheological effects on the levelling dynamics of thin fluid films. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 25(8).