FINE GRADING PADA ALJABAR MATRIKS

Irham Walidaka, Rizky Rosjanuardi, Sumanang Muhtar Gozali

Departemen Pendidikan Matematika
Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Pendidikan Indonesia
Surel: irhambinabihasim@gmail.com

ABSTRAK. Suatu aljabar matriks A atas lapangan F belum tentu dapat di dekomposisi menjadi hasil jumlah langsung dari submodulnya sehingga menjadi *fine graded* atas suatu grup G. Dekomposisi menjadi *fine graded* ini ditentukan oleh grup yang digunakan. Pada kasus aljabar matriks $M_2(\mathbb{R})$ bila digunakan grup siklik sebagai indeks dalam mendekomposisi suatu aljabar matriks menjadi aljabar yang *fine graded* mengakibatkan submodulnya menjadi tidak bebas linear, sehingga bukan suatu jumlah langsung. Sedangkan ketika menggunakan grup non-siklik, submodulnya bisa merupakan jumlah langsung dan memenuhi $A_g A_h \subseteq A_{g+h}$ sehingga *fine grading* untuk aljabar matriks dapat dilakukan. Support dari A suatu alajabar matriks akan membentuk subgrup dan setiap elemen tak nol di A_g mempunyai invers.

Kunci: Aljabar *graded*, aljabar matriks, *fine graded*, jumlah langsung

e-ISSN: 2528-4231
p-ISSN: 2776-480X

Fine Grading on Matrix Algebra

ABSTRACT. *A matrix algebra A over a field F may not necessarily be decomposed into a direct amount of submodule so that it becomes fine graded over a group G. Decomposition to fine graded is determined by the group used. In the case of matrix algebra $M_2(R)$ when cyclic groups are used as an index in decomposing a matrix algebra into fine graded algebra, the submodule becomes linearly independent, so it is not a direct sum. Whereas when using non-cyclic groups, the submodules can be direct amounts and meet $A_g\ A_h \subseteq A_{(g\,+\,h)}$ so that fine grading for matrix algebra can be done. The support of A matrix algebra will form a subgroup and every nonzero element in A_g has an inverse.*

Key words: *Graded algebra, matrix algebra, fine graded, direct sums*

1. PENDAHULUAN

Pada suatu aljabar dan ring *graded* merupakan ring yang dapat dituliskan ke dalam dekomposisi jumlah langsung dengan grup abelian sebagai indeksnya. Proses tersebut biasa dinamakan dengan *grading* [1]. Grup yang digunakan sebagai indeks biasanya meliputi grup bilangan bulat tak negatif atau bilangan bulat. Pada bukunya Hazrat [2] memaparkan sifat-sifat alami pada suatu aljabar *graded*. Kemudian Bahturin dan Sehgal [3], Bahturin dan Zaicev [4, 5] mengemukakan suatu grading yang lebih khusus di mana dimensi setiap submodulnya ≤1 sehingga terdapat kaitan dengan basis suatu aljabar.

Pada artikel ini dijelaskan sifat-sifat yang berlaku suatu aljabar matriks *graded*. Selanjutnya dijelaskan bagaimana proses dekomposisi suatu aljabar matriks menjadi aljabar matriks yang *fine graded* menggunakan grup non-siklik maupun siklik [6].

Definisi 1.1[2, hlm.11]

Misalkan G grup abelian, aljabar A atas lapangan F dikatakan G-graded jika $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ dengan A_g submodul dari A, sedemikian sehingga $A_g A_h \subseteq A_{g+h}$. $a \in A$ dikatakan elemen homogeneous berderajat g jika $a \in A_g$. Support dari A dinotasikan dengan

$$Supp(A) := \{g \in G | A_g \neq 0\}$$

Grading dapat diterapkan pada aljabar matriks sehingga aljabar matriks tersebut dapat didekomposisi menjadi produk dari jumlah langsung submodulnya dengan memenuhi sifat *graded*. dengan menerapkan suatu grup sebagai indeks.

$$M_n(F) = A = \bigoplus_{g\in G} A_g, A_g A_h \subseteq A_{g+h}$$

Lebih khusus lagi, grading tersebut bisa dikontruksi menjadi *fine grading*.

Definisi 1.2.[3, Definition 3]

Grading $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ dikatakan *fine* jika $dim(A_g) \leq 1$ untuk setiap $g \in G$.

Proposisi 1.3.[2, Proposition 1.1.1]

Misalkan $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ sebuah aljabar G-graded, maka:

1. 1_A merupakan elemen homogeneous berderajat 0 yaitu $1_A \in A_0$

e-ISSN: 2528-4231
p-ISSN: 2776-480X

2. untuk setiap elemen homogeneous $a \in A_g$ yang mempunyai invers, maka a^{-1} merupakan elemen homogeneous berderajat g^{-1}, yaitu $a^{-1} \in A_{g^{-1}}$

2. METODOLOGI

Pada penelitian ini akan dijelaskan bagaimana proses dalam menentukan submodul A_g dengan g elemen suatu grup, agar $M_2(\mathbb{R})$ dapat ditulis sebagai hasil jumlah langsung dari A_g dan memenuhi $A_g A_h \subseteq A_{g+h}$, sehingga menjadi aljabar matriks yang *fine graded*. Grup yang digunakan meliputi grup non-siklik dan grup siklik. Diberikan juga contoh aljabar matriks yang *fine graded*.

3. HASIL/TEMUAN DAN PEMBAHASAN

Pertama akan dijabarkan terlebih dahulu Teorema 2.1., yang akan mendukung dalam proses *fine grading* pada suatu aljabar matriks.

Teorema 2.1.[3, Lemma 2.6]

Misalkan G grup dan $M_n(F) = A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ merupakan aljabar matriks atas lapangan F yang *fine graded*, maka $H = Supp(A)$ membentuk subgrup dan setiap elemen homogeneous tak nol-nya mempunyai invers.

Bukti: Berdasarkan Proposisi 1.3., A_e memuat matriks identitas. Karena $M_n(F)$ aljabar *fine graded*, diperoleh bahwa $dim(A_e) = 1$. Karena A_e memuat matriks identitas dan berdimensi satu, maka A_e merupakan ruang matriks skalar.

Misalkan $a \neq 0 \in A_g$ sembarang elemen homogeneous. Jika $det(a) = 0$, maka $det(xay) = 0$ untuk setiap $x, y \in A$, Maka $AaA \cap A_e = 0$. Karena AaA adalah ruang matriks dengan determinan nol, sedangkan A_e ruang matriks skalar, maka $AaA \cap A_e = 0$.

Perhatikan bahwa AaA ideal di A, maka $AaA = 0$ atau $AaA = A$. Tapi karena AaA memuat matriks identitas, jadi haruslah $AaA = A$. ini kontradiksi dengan fakta bahwa AaA berisikan matriks-matriks yang mempunyai determinan nol. Artinya, haruslah $det(a) \neq 0 \in A_g$. Jadi dapat disimpulkan bahwa $a \in A_g$ merupakan matriks yang mempunyai invers.

Lebih lanjut, jika $A_g, A_h \neq 0$, maka $A_{gh} \neq 0$. Artinya, untuk $g, h \in H = supp(A)$ mengakibatkan $gh \in H = supp(A)$. jadi $H = supp(A)$ tertutup terhadap operasi di G.

Berdasarkan Proposisi 1.3., jika $a \neq 0 \in A_g$, maka terdapat $a^{-1} \in A_{g^{-1}}$. Artinya, jika $g \in H = supp(A)$, maka $g^{-1} \in H = supp(A)$. Diperoleh $H = supp(A)$ membentuk subgrup dari G. ■

Selanjutnya akan diberikan contoh dan proses grading menggunakan grup non siklik.

Contoh 2.2.

Misalkan $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 := \{(a,b)|a,b \in \mathbb{Z}_4\}$, dan $M_2(\mathbb{R})$ suatu aljabar matriks berukuran 2×2 atas bilangan real. $M_2(\mathbb{R}) = A_{(\bar{0},\bar{0})} \oplus A_{(\bar{0},\bar{2})} \oplus A_{(\bar{2},\bar{2})} \oplus A_{(\bar{2},\bar{0})}$ dengan

$$A_{(\bar{0},\bar{0})} := \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} | a \in \mathbb{R}\right\}, A_{(\bar{0},\bar{2})} := \left\{\begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} | b \in \mathbb{R}\right\}$$

$$A_{(\bar{2},\bar{2})} := \left\{\begin{bmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{bmatrix} | c \in \mathbb{R}\right\}, A_{(\bar{2},\bar{0})} := \left\{\begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix} | d \in \mathbb{R}\right\}$$

$M_2(\mathbb{R})$ merupakan suatu aljabar *fine graded* dengan

$$suppA = \{(\bar{0},\bar{0}), (\bar{0},\bar{2}), (\bar{2},\bar{0}), (\bar{2},\bar{2})\}$$

Pertama-tama perhatikan bahwa dimensi dari $M_2(\mathbb{R})$ adalah empat, karena akan dikontruksi aljabar *fine graded*, artinya setiap komponen mempunyai dimensi ≤ 1. Sehingga kita akan mengkontruksi $M_2(\mathbb{R})$ menjadi hasil jumlah langsung dari empat komponen. Berdasarkan Teorema 2.1., diketahui bahwa support dari suatu aljabar matriks *fine graded* membentuk subgrup, maka pilih subgrup yang berorder empat sehingga dapat dijadikan *support* untuk $M_2(\mathbb{R})$. Diperoleh $\{(\bar{0},\bar{0}), (\bar{0},\bar{2}), (\bar{2},\bar{0}), (\bar{2},\bar{2})\}$ berorder empat subgrup dari $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$. Jadi dapat kita tulis

$$M_2(\mathbb{R}) = A_{(\bar{0},\bar{0})} \oplus A_{(\bar{0},\bar{2})} \oplus A_{(\bar{2},\bar{2})} \oplus A_{(\bar{2},\bar{0})}$$

dengan dimensi setiap komponennya satu.

Berdasarkan Proposisi 1.3., elemen kesatuan harus termuat di $A_{(\bar{0},\bar{0})}$. Karena dimensi dari $A_{(\bar{0},\bar{0})}$ harus sama dengan satu, maka diperoleh

e-ISSN: 2528-4231
p-ISSN: 2776-480X

$$A_{(\overline{0},\overline{0})} := \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$$

Selanjutnya berdasarkan Teorema 2.1., setiap matriks tak nol pada setiap komponennya harus mempunyai invers. Artinya, matriks pada setiap komponennya haruslah matriks yang determinannya bukan 0. Perhatikan bahwa $(\overline{0},\overline{2}),(\overline{2},\overline{0}),(\overline{2},\overline{2})$ mempunyai invers yaitu dirinya sendiri, dan $(\overline{0},\overline{2})+(\overline{2},\overline{0})=(\overline{2},\overline{2})$; $(\overline{0},\overline{2})+(\overline{2},\overline{2})=(\overline{2},\overline{0})$; $(\overline{2},\overline{2})+(\overline{2},\overline{0})=(\overline{0},\overline{2})$. Karena $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$ merupakan grup abelian, jadi $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$ bersifat komutatif. Dari uraian tadi, dapat kita pilih submodul dari $M_2(\mathbb{R})$ di mana masing-masing elemen-nya mempunyai invers di submodul tersebut dan mempunyai sifat yang sama dengan $(\overline{0},\overline{2})+(\overline{2},\overline{0})=(\overline{2},\overline{2})$; $(\overline{0},\overline{2})+(\overline{2},\overline{2})=(\overline{2},\overline{0})$; $(\overline{2},\overline{2})+(\overline{2},\overline{0})=(\overline{0},\overline{2})$ dan irisannya hanyalah matriks nol. Sehingga diperoleh

$$\left\{\begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} \middle| b \in \mathbb{R}\right\}, \left\{\begin{bmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{bmatrix} \middle| c \in \mathbb{R}\right\}, \left\{\begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix} \middle| d \in \mathbb{R}\right\}$$

Kemudian pasangkan dengan $A_{(\overline{0},\overline{2})}, A_{(\overline{2},\overline{2})}, A_{(\overline{2},\overline{0})}$ sehingga diperoleh

$$A_{(\overline{0},\overline{2})} = \left\{\begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} \middle| b \in \mathbb{R}\right\}$$

$$A_{(\overline{2},\overline{2})} = \left\{\begin{bmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{bmatrix} \middle| c \in \mathbb{R}\right\}$$

$$A_{(\overline{2},\overline{0})} = \left\{\begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix} \middle| d \in \mathbb{R}\right\}$$

Pertama-tama akan ditunjukan terlebih dahulu bahwa $A = A_{(\overline{0},\overline{0})} \oplus A_{(\overline{0},\overline{2})} \oplus A_{(\overline{2},\overline{2})} \oplus A_{(\overline{2},\overline{0})}$. Ambil sembarang

$$\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa $w = 1a + 0b + 0c + 1d, x = 0a + 1b + 1c + 0d, y = 0a + 1b - 1c + 0d, z = 1a + 0b + 0c - 1d$, sehingga dapat kita bentuk matriks untuk menentukan a, b, c dan d. Diperoleh matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & w \\ 0 & 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -1 & 0 & y \\ 1 & 0 & 0 & -1 & z \end{bmatrix}$$

dan diperoleh $a = \frac{w+z}{2}, b = \frac{x+y}{2}, c = \frac{x-y}{2}, d = \frac{w-z}{2}$, sehingga dapat disimpulkan bahwa:

$$\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{w+z}{2} & 0 \\ 0 & \frac{w+z}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{x+y}{2} \\ \frac{x+y}{2} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{x-y}{2} \\ -\frac{x-y}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{w-z}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{w-z}{2} \end{bmatrix}$$

sehingga $A = A_{(\overline{0},\overline{0})} \oplus A_{(\overline{0},\overline{2})} \oplus A_{(\overline{2},\overline{2})} \oplus A_{(\overline{2},\overline{0})}$.

Selanjutnya akan ditunjukan bahwa A merupakan suatu aljabar $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$-*graded*. Ambil sembarang elemen homogeneous

$$a = \begin{bmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{bmatrix} \in A_{(\overline{2},\overline{2})}$$

dan

$$b = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix} \in A_{(\overline{2},\overline{0})}$$

Akan ditunjukan ab termuat di $A_{(\overline{2},\overline{2})+(\overline{2},\overline{0})} = A_{(\overline{0},\overline{2})}$. Perhatikan bahwa

$$ab = \begin{bmatrix} 0 & -cd \\ -cd & 0 \end{bmatrix} \in A_{(\overline{0},\overline{2})}$$

Karena a dan b diambil sembarang, maka berlaku $A_{(\overline{0},\overline{2})} A_{(\overline{2},\overline{2})} \subseteq A_{(\overline{2},\overline{2})+(\overline{2},\overline{0})} = A_{(\overline{0},\overline{2})}$. Dengan cara yang serupa untuk setiap komponen, diperoleh $A_g A_h \subseteq A_{g+h} \forall g,h \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$. Maka berdasarkan Definisi 1.1., dapat disimpulkan bahwa A merupakan suatu aljabar $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$-graded.

Selanjutnya akan ditunjukan bahwa A merupakan aljabar *fine* graded. Perhatikan bahwa

$$c = \begin{bmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{bmatrix} \in A_{(\overline{2},\overline{2})}$$

sembarang elemen homogeneous di $A_{(\overline{2},\overline{2})}$ dapat dibangun oleh

$$c = \begin{bmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena c sembarang elemen di $A_{(\overline{2},\overline{2})}$, maka untuk setiap elemen di $A_{(\overline{2},\overline{2})}$ berupa kombinasi linier dari satu buah matriks. Maka dapat disimpulkan bahwa $dim(A_{(\overline{2},\overline{2})}) = 1$. Dengan cara yang serupa untuk semua komponen, diperoleh bahwa $dim(A_{(\overline{2},\overline{2})}) = dim(A_{(\overline{2},\overline{2})}) = dim(A_{(\overline{2},\overline{2})}) = dim(A_{(\overline{2},\overline{2})}) = 1$. Jadi berdasarkan Definisi 1.1. dan uraian sebelumnya dapat disimpulkan bahwa A merupakan suatu aljabar *fine* graded. ■

Selanjutnya akan diperiksa apakah aljabar matriks $M_2(\mathbb{R})$ dapat didekomposisi menjadi aljabar *fine graded* dengan grup $\mathbb{Z}_n$ sebagai indeks.

Berdasarkan Teorema 2.1., diketahui bahwa support dari suatu aljabar matriks *fine graded* membentuk subgrup, maka pilih grup yang mempunyai subgrup berorder empat sehingga dapat dijadikan *support* untuk $M_2(\mathbb{R})$. Misalkan dipilih $\mathbb{Z}_4$, di mana $\mathbb{Z}_4$ itu sendiri sebagai subgrupnya. Sehingga dapat kita tulis

$$M_2(\mathbb{R}) = B_{\overline{0}} \oplus B_{\overline{1}} \oplus B_{\overline{2}} \oplus B_{\overline{3}}$$

dengan $B_{\overline{f}} B_{\overline{g}} \subseteq B_{\overline{f+g}} \forall f, g \in \mathbb{Z}_4$ dan dimensi setiap komponennya satu.

Berdasarkan Proposisi 1.3., elemen identitas harus termuat di $B_{\overline{0}}$. Karena dimensi dari $B_{\overline{0}}$ harus sama dengan satu, maka diperoleh

$$B_{\overline{0}} := \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_0 a & 0 \\ 0 & \alpha_0 a \end{bmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}$$

Selanjutnya berdasarkan Teorema 2.1., setiap matriks tak nol pada setiap komponen harus mempunyai invers. Artinya, matriks pada setiap komponennya haruslah matriks yang determinannya bukan 0. Sekarang perhatikan bahwa $\overline{2} \in \mathbb{Z}_4$ mempunyai invers dirinya sendiri. Artinya, jika kita ambil dua sembarang matriks di $B_{\overline{2}}$ kemudian kita kalikan, maka harus termuat di $B_{\overline{0}}$. Selanjutnya misalkan

$$B_{\overline{2}} := \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_2 c & \beta_2 c \\ \gamma_2 c & \delta_2 c \end{bmatrix} | c \in \mathbb{R} \right\}$$

merupakan sembarang submodul matriks berdimensi satu. Ambil sembarang

$$b = \begin{bmatrix} \alpha_2 x & \beta_2 x \\ \gamma_2 x & \delta_2 x \end{bmatrix}, b' = \begin{bmatrix} \alpha_2 y & \beta_2 y \\ \gamma_2 y & \delta_2 y \end{bmatrix} \in B_{\overline{2}}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} bb' &= \begin{bmatrix} \alpha_2 x\alpha_2 y + \beta_2 x\gamma_2 y & \alpha_2 x\beta_2 y + \beta_2 x\gamma_2 y \\ \gamma_2 x\alpha_2 y + \delta_2 x\gamma_2 y & \gamma_2 x\beta_2 y + \delta_2 x\delta_2 y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} xy(\alpha_2^2 + \beta_2\gamma_2) & xy(\alpha_2\beta_2 + \beta_2\gamma_2) \\ xy(\gamma_2\alpha_2 + \delta_2\gamma_2) & xy(\gamma_2\beta_2 + \delta_2^2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Berdasarkan Definisi 1.1., bb' haruslah termuat di $B_{\overline{2}}B_{\overline{2}} \subseteq B_{\overline{2}+\overline{2}} = B_{\overline{0}}$ sehingga

$$\begin{bmatrix} xy(\alpha_2^2 + \beta_2\gamma_2) & xy(\alpha_2\beta_2 + \beta_2\gamma_2) \\ xy(\gamma_2\alpha_2 + \delta_2\gamma_2) & xy(\gamma_2\beta_2 + \delta_2^2) \end{bmatrix} \in B_{\overline{0}} := \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_0 a & 0 \\ 0 & \alpha_0 a \end{bmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}$$

artinya bb' harus memenuhi:

1. $\alpha^2 + \beta\gamma = \gamma\beta + \delta^2 \Leftarrow \alpha_2^2 = \delta_2^2$ sehingga diperoleh $\alpha = \delta$ atau $\alpha = -\delta$
2. $\alpha_2\beta_2 + \delta_2\beta_2 = 0 \Leftarrow \alpha_2\beta_2 = -\delta_2\beta_2 \Leftarrow \alpha_2 = -\delta_2$
3. $\alpha_2\gamma_2 + \delta_2\gamma_2 = 0 \Leftarrow \alpha_2\gamma_2 = -\delta_2\gamma_2 \Leftarrow \alpha_2 = -\delta_2$

Perhatikan jika $\alpha_2 = \delta_2$ mengakibatkan $\beta_2 = \gamma_2 = 0$ sehingga

$$\begin{bmatrix} \alpha_2 x & 0 \\ 0 & \delta_2 x \end{bmatrix}$$

Tapi hal ini mengakibatkan $B_{\overline{2}} = B_{\overline{0}}$. Hal ini tidak dapat dilakukan karena $B_{\overline{2}} \cap B_{\overline{0}}$ haruslah hanya matriks 0, sedangkan jika $B_{\overline{2}} = B_{\overline{0}}$ irisannya bukan hanya matriks 0. Jadi haruslah $\alpha_2 = -\delta_2$, sehingga diperoleh

$$B_{\overline{2}} := \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_2 c & \beta_2 c \\ \gamma_2 c & -\alpha_2 c \end{bmatrix} | c \in \mathbb{R} \right\}$$

Selanjutnya misalkan

$$B_{\overline{1}} := \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 b & \beta_1 b \\ \gamma_1 b & \delta_1 b \end{bmatrix} | b \in \mathbb{R} \right\}$$

merupakan sembarang submodul matriks berdimensi satu

$$c = \begin{bmatrix} \alpha_1 x & \beta_1 x \\ \gamma_1 x & \delta_1 x \end{bmatrix}, c' = \begin{bmatrix} \alpha_1 y & \beta_1 y \\ \gamma_1 y & \delta_1 y \end{bmatrix} \in B_{\overline{1}}$$

Perhatikan bahwa

$$cc' = \begin{bmatrix} \alpha_1 x \alpha_1 y + \beta_1 x \gamma_1 y & \alpha_1 x \beta_1 y + \beta_1 x \gamma_1 y \\ \gamma_1 x \alpha_1 y + \delta_1 x \gamma_1 y & \gamma_1 x \beta_1 y + \delta_1 x \delta_1 y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} xy(\alpha_1^2 + \beta_1\gamma_1) & xy(\alpha_1\beta_1 + \beta_1\gamma_1) \\ xy(\gamma_1\alpha_1 + \delta_1\gamma_1) & xy(\gamma_1\beta_1 + \delta_1^2) \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Definisi 2.4.1., cc' haruslah termuat di $B_{\bar{1}}B_{\bar{1}} = B_{\bar{1}+\bar{1}} \subseteq B_{\bar{2}}$ sehingga

$$\begin{bmatrix} xy(\alpha_1^2 + \beta_1\gamma_1) & xy(\alpha_1\beta_1 + \beta_1\gamma_1) \\ xy(\gamma_1\alpha_1 + \delta_1\gamma_1) & xy(\gamma_1\beta_1 + \delta_1^2) \end{bmatrix} \in B_{\bar{2}} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_2 c & \beta_2 \\ \gamma_2 & -\alpha_2 c \end{bmatrix} | c \in \mathbb{R} \right\}$$

diperoleh $\alpha_1^2 + \beta_1\gamma_1 = -\gamma_1\beta_1 - \delta_1^2 \Leftarrow \alpha_1^2 + \delta_1^2 = -2\beta_1\gamma_1$. Jadi

$$B_{\bar{1}} := \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 b & \beta_1 b \\ \gamma_1 b & \delta_1 b \end{bmatrix} | k \in \mathbb{R} \right\} \text{ yang memenuhi } \alpha_1^2 + \delta_1^2 = -2\beta_1\gamma_1$$

Selanjutnya, berdasarkan Definisi 2.4.1., $B_{\bar{3}}B_{\bar{3}} = B_{\bar{3}+\bar{3}} \subseteq B_{\bar{2}}$. Dengan cara yang serupa dengan $B_{\bar{1}}$, diperoleh

$$B_{\bar{3}} := \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_3 d & \beta_3 d \\ \gamma_3 d & \delta_3 d \end{bmatrix} | d \in \mathbb{R} \right\} \text{ yang memenuhi } \alpha_3^2 + \delta_3^2 = -2\beta_3\gamma_3.$$

Tidak sembarang dekomposisi $M_2(\mathbb{R}) := A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}} \oplus A_{\bar{2}} \oplus A_{\bar{3}}$ mengakibatkan *fine graded* untuk $M_2(\mathbb{R})$, atau sebaliknya, yaitu terdapat $A_{\bar{1}}, A_{\bar{2}}, A_{\bar{3}}, A_{\bar{4}}$ yang memenuhi $A_{\bar{f}}A_{\bar{g}} \subseteq A_{\bar{f}+g} \forall f, g \in \mathbb{Z}_4$ tetapi tidak mengakibatkan dekomposisi jumlah langsung untuk $M_2(\mathbb{R})$

Contoh 2.3. Akan dipilih $A_{\bar{1}}, A_{\bar{2}}, A_{\bar{3}}, A_{\bar{4}}$ sedemikian sehingga memenuhi $A_{\bar{f}}A_{\bar{g}} \subseteq A_{\bar{f}+g} \forall f, g \in \mathbb{Z}_4$. Berdasarkan Proposisi 1.3, diperoleh

$$A_{\bar{0}} := \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}$$

Selanjutnya tentukan

$$A_{\bar{1}} := \left\{ \begin{bmatrix} b & b \\ -b & b \end{bmatrix} | b \in \mathbb{R} \right\}$$

Selanjutnya tentukan $A_{\bar{2}}$ dengan mengkalikan sembarang dua matriks di $A_{\bar{1}}$. Ambil sembarang

$$p = \begin{bmatrix} x & x \\ -x & x \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} y & y \\ -y & y \end{bmatrix} \in A_{\bar{1}}$$

Perhatikan bahwa

$$pq = \begin{bmatrix} 0 & -2xy \\ -2xy & 0 \end{bmatrix} \in A_{\bar{2}}$$

Dari uraian di atas diperoleh

$$A_{\bar{2}} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{bmatrix} | c \in \mathbb{R} \right\}$$

Selanjutnya tentukan $A_{\bar{3}}$ dengan mengkalikan sembarang matriks di $A_{\bar{1}}$ dan sembarang matriks di $A_{\bar{2}}$. Ambil sembarang

$$r = \begin{bmatrix} x & x \\ -x & x \end{bmatrix} \in A_{\bar{1}}$$

$$s = \begin{bmatrix} 0 & y \\ -y & 0 \end{bmatrix} \in A_{\bar{2}}$$

Perhatikan bahwa

$$pq = \begin{bmatrix} -xy & xy \\ -xy & -xy \end{bmatrix} \in A_{\bar{3}}$$

Dari uraian di atas diperoleh

$$A_{\bar{3}} := \left\{ \begin{bmatrix} -d & d \\ -d & -d \end{bmatrix} | d \in \mathbb{R} \right\}$$

Selanjutnya akan diperiksa apakah $M_2(\mathbb{R}) := A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}} \oplus A_{\bar{2}} \oplus A_{\bar{3}}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

dapat ditulis menjadi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

juga dapat ditulis menjadi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x & -x \\ x & -x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena penulisannya tidak tunggal, sehingga $M_2(\mathbb{R})$ tidak dapat dibentuk menjadi $M_2(\mathbb{R}) := A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}} \oplus A_{\bar{2}} \oplus A_{\bar{3}}$. Jadi contoh di atas bukan merupakan aljabar *graded*. ■

Selanjutnya akan diperiksa bentuk umum dari grading dengan menggunakan grup siklik. Misalkan $M_2(\mathbb{R})$ suatu aljabar matriks. Berdasarkan uraian sebelumnya diperoleh bahwa

$$A_{\bar{0}} := \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}$$

selanjutnya tentukan sembarang

$$A_{\bar{1}} := \left\{ \begin{bmatrix} \alpha b & \beta b \\ \gamma b & \delta b \end{bmatrix} | b \in \mathbb{R} \right\}$$

yang memenuhi $\alpha^2 + \delta^2 = -2\beta\gamma$. Selanjutnya perhatikan bahwa $A_{\bar{1}} A_{\bar{1}} \subseteq A_{\bar{2}}$ sehingga dapat kita peroleh

$$A_{\bar{2}} := \left\{ \begin{bmatrix} (\alpha^2 + \beta\gamma)c & (\alpha\beta + \beta\delta)c \\ (\alpha\gamma + \gamma\delta)c & (\delta^2 + \beta\gamma)c \end{bmatrix} | c \in \mathbb{R} \right\}$$

kemudian misalkan

$$A_{\bar{3}} := \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_3 d & \beta_3 d \\ \gamma_3 d & \delta_3 d \end{bmatrix} | d \in \mathbb{R} \right\}$$

sedemikian sehingga memenuhi $A_{\bar{1}} A_{\bar{2}} \subseteq A_{\bar{3}}$. Untuk dapat menjadi aljabar graded, $M_2(\mathbb{R})$ harus dapat ditulis menjadi $M_2(\mathbb{R}) := A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}} \oplus A_{\bar{2}} \oplus A_{\bar{3}}$. Artinya untuk setiap matriks

$$\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

harus dapat ditulis secara tunggal menjadi

$$\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha b & \beta b \\ \gamma b & \delta b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\alpha^2 + \beta\gamma)c & (\alpha\beta + \beta\delta)c \\ (\alpha\gamma + \gamma\delta)c & (\delta^2 + \beta\gamma)c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_3 d & \beta_3 d \\ \gamma_3 d & \delta_3 d \end{bmatrix}$$

Dengan menentukan $a, b, c, d = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

dapat ditulis menjadi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tapi, dengan menentukan $a = \alpha\delta - \beta\gamma, b = -\alpha - \delta, c = 1, d = 0$ juga dapat ditulis menjadi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\delta - \beta\gamma & 0 \\ 0 & \alpha\delta - \beta\gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha^2 - \alpha\delta & -\alpha\beta - \beta\delta \\ -\alpha\gamma - \gamma\delta & -\delta^2 - \alpha\delta \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \alpha\beta + \beta\delta \\ \alpha\gamma + \gamma\delta) & \delta^2 + \beta\gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sehingga penulisannya tidak tunggal. Karena secara umum, jadi *fine grading* menggunakan grup siklik pada $M_2(\mathbb{R})$ tidak dapat dilakukan.

4. KESIMPULAN

Fine grading pada $M_2(\mathbb{R})$ dapat dilakukan menggunakan grup non-siklik dengan menentukan $A_{(\overline{0},\overline{0})}, A_{(\overline{2},\overline{0})}$ dan $A_{(\overline{0},\overline{2})}$ dapat diperoleh $A_{(\overline{2},\overline{2})}$ sehingga menjadi aljabar*fine* $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$-*graded*, sedangkan *fine grading* pada $M_2(\mathbb{R})$ tidak dapat dilakukan, Dengan menentukan $A_{\overline{0}}$ dan $A_{\overline{1}}$ dapat diperoleh $A_{\overline{2}}$ dan $A_{\overline{3}}$ sehingga memenuhi $A_g A_h \subseteq A_{g+h} \forall g + h \in \mathbb{Z}_4$ tetapi bukan suatu jumlah langsung untuk $M_2(\mathbb{R})$.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Goto, S., & Watanabe, K. (1978). On graded rings, *I. Journal of the Mathematical Society of Japan*, 30(2), 179-213.

[2] Hazrat, R. (2016). *Graded Rings and Graded Grothendieck Groups.* Sydney: Western Sydney University.

[3] Bahturin, Y. A. dan Sehgal, S. K. (2001). Group Gradings on Associative Algebras. *Journal of Algebra*. 241, 677-698.

[4] Bahturin, Y. A. dan Zaicev, M. V. (2002). Group Gradings on matrix Algebras. *Canad. Math. Bull*. 45(4), 499-508.

[5] Bahturin, Y.A. dan Zaicev, M. V. (2001). Graded Algebra and Graded Identities. *Polynomial Identities and Combinatorial Methods*. 235, 101-139.

[6] Boboc, C. dan Dascalescu, S. (2001). *Gradings of Matrix Algebras by Cyclic Groups. Communication in Algebra*. 29(11), 5013-5021.