MODEL MATEMATIKA UNTUK KECEPATAN ALIRAN DARAH

Gelar Salman, Siti Fatimah, Kartika Yulianti

Departemen Pendidikan Matematika FPMIPA UPI

*Surel: gelar.slmn30@gmail.com

ABSTRAK. Darah yang tersebar di dalam seluruh tubuh kita mengalir setiap detik untuk kehidupan. Aliran darah membawa zat-zat yang penting untuk aktivitas organ-organ tubuh, seperti oksigen dan zat-zat nutrisi lainnya. Pada artikel ini dipaparkan model matematika untuk kecepatan aliran darah di dalam pembuluh darah, dan faktor-faktor yang mempengaruhinya. Model matematika yang dikonstruksi berasal dari persamaan Navier Stokes untuk kecepatan aliran fluida satu arah dengan koordinat polar slilinder dan persamaan kontinuitas. Pencarian solusi dari model dilakukan dengan metode pemisahan variable. Berdasarkan model tersebut diperoleh profil kecepatan alirah darah dan faktor-faktor yang mempengaruhinya yaitu jari-jari pembuluh, gradien tekanan darah, dan kekentalan darah.

Kata Kunci: Kecepatan Aliran Darah, Persamaan Navier Stokes, Metode Pemisahan Variabel

A MATHEMATICAL MODEL OF VELOCITY BLOOD FLOW

ABSTRACT. Blood that scattered throughout our body, flows in every second for life. Blood flow carries an important substances for the activity of organs, such as oxygen and other nutrients. Blood flow has a different velocity at all times. In this paper we explain a mathematical model of blood flow in blood vessel, and its factors. The model is formed by Navier-Stokes equation of one dimensional fluid velocity in polar cylindrical coordinate and continuity equation. The solutions are obtained by separation of variable. Based on mathematical model, we obtain the velocity profile of blood flow. It affected by blood vessels radius, pressure gradient, and blood viscosity.

Key Words: Velocity of Blood Flow, Navier-Stokesc equation, Separating Variable Method.

1. PENDAHULUAN

Darah merupakan cairan dalam sistem peredaran dalam manusia yang membawa beberapa materi (Hoefnagels, 2013). Darah berperan penting dalam sistem peredaran atau transportasi internal tubuh manusia dan hewan. Perpindahan zat-zat seperti bahan makanan, udara, sisa-sisa metabolisme tubuh diangkut dalam darah. Dalam manusia, darah dipompa ke seluruh tubuh atau ke paru-paru sehingga terjadi proses peredaran darah atau kardiovaskular. Pada proses tersebut, terdapat organ pembuluh darah yang berfungsi sebagai jalan aliran darah. Pada saat jantung berdetak, terdapat proses perpindahan darah baik menerima atau memompa darah. Darah yang tersebar di dalam seluruh tubuh mengalir setiap detik untuk kehidupan setiap makhluk hidup khususnya manusia.

Aliran darah dalam tubuh manusia terbagi ke beberapa arah dalam suatu pembuluh, yaitu arah yang berpusat dalam satu titik dan arah yang menuju ke seluruh arah termasuk menuju tepi pembuluh. Tidak sedikit dijumpai terdapat beberapa kejadian mengenai aliran darah di mana memiliki kecepatan yang sangat besar atau bahkan memiliki kecepatan yang sangat kecil. Hal tersebut dapat mengganggu aktifitas organ dalam tubuh sehingga dapat menimbulkan beberapa penyakit, seperti stroke, hipertensi, hipotensi, penyakit jantung koroner, dan sebagainya.

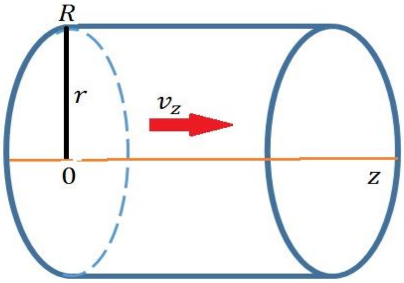
Dalam hal ini, penyusunan model matematika untuk kecepatan aliran darah sangat diperlukan dalam dunia kesehatan karena untuk mengetahui seberapa besar kecepatan aliran darah pada tubuh manusia. Model tersebut menggunakan persamaan differensial parsial yang menjelaskan tentang aliran fluida. Persamaan yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah persamaan Navier Stokes. Persamaan Navier Stokes merupakan persamaan differensial parsial non linear yang menjelaskan tentang aliran fluida dinamis. Dengan menggunakan persamaan Navier Stokes dan persamaan kontinuitas, pada artikel ini dijelaskan penentuan model matematika untuk kecepatan aliran darah, pencarian solusi untuk model matematika tersebut, dan faktor-faktor yang mempengaruhi kecepatan aliran darah.

2. METODOLOGI

Langkah-langkah dalam penelitian ini meliputi merumuskan masalah, membangun model matematika, mencari solusi untuk model, dan menarik kesimpulan. Merujuk pada Leal (2007), berikut ini adalah model matematika untuk kecepatan aliran darah di dalam pembuluh darah.

Penyusunan model matematika untuk aliran darah menggunakan beberapa asumsi, yakni

1. Darah berupa fluida Newtonian yang tak mampat (*incompressible*). Pembuluh darah diasumsikan berbentuk silinder, berukuran pendek dan tidak mengalami perubahan jari-jari (lihat Gambar 1).
2. Arah aliran darah yang dikaji pada satu dimensi pada sumbu z.
3. Tekanan darah bernilai konstan.
4. Tidak ada hambatan di dalam pembuluh darah.
5. Bahan-bahan penyusun darah bersifat seragam.
6. Pembuluh darah bersifat simetri terhadap sumbu z.



Gambar 1. Domain pembuluh darah pada sumbu z

Misalkan terdapat suatu pembuluhd darah berbentuk silinder dengan jari-jari konstan R, dan vektor kecepatan aliran darah dinotasikan dengan $\boldsymbol{v} = (v_r, v_\theta, v_z)$. Persamaan pembangun untuk aliran fluida adalah persamaan Navier Stokes dan persamaan kontinuitas. Persamaan Navier Stokes dalam koordinat polar silinder yaitu:

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$
$$= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right), \qquad (2.1)$$

dimana p adalah tekanan fluida, t adalah waktu, ρ adalah massa jenis fluida, μ adalah konstanta kekentalan fluida. Sedangkan persamaan kontinuitas dalam koordinat polar silinder adalah:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \qquad (2.2)$$

Berdasarkan asumsi aliran bersifat simetri terhadap sumbu z, tekanan darah p bernilai konstan (G), dan mengabaikan kecepatan aliran darah arah radial dan tangensial ($v_r = v_\theta = 0$), maka persamaan (2.1) dan (2.2) menjadi

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = G + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right), \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{2.4}$$

Berdasarkan persamaan kontinuitas (2.4) maka diperoleh

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}\right) = G + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right) \tag{2.5}$$

dan $v_z = v_z(r,t)$. Persamaan (2.5) adalah model matematika untuk kecepatan aliran darah dalam satu arah pada sumbu z. Ada tiga kondisi yang berlaku untuk persamaan (2.5) yaitu:

1. $v_z = 0$ pada $r = R$ untuk semua t (2.6 a)
2. $v_z = 0$ saat $t = 0$ untuk semua r (2.6 b)
3. v_z bernilai terbatas di $r = 0$ untuk semua t (2.6 c)

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Langkah awal yang dilakukan untuk mendapatkan solusi dari persamaan (2.5) dengan syarat batas (2.6) adalah mentransformasi persamaan tersebut menjadi bentuk tidak berdimensi (Leal, 2007). Misalkan $\bar{r}$, $\bar{t}$, dan $\bar{v_z}$ berturut-turut adalah variabel-variabel yang tak berdimensi untuk jari-jari pembuluh, waktu, dan kecepatan aliran darah dalam arah sumbu z. Mengikuti dari kajian Leal (2007), variabel-variabel tak berdimensi didefinisikan sebagai

$$\bar{r} = \frac{r}{R}, \bar{v_z} = \frac{v_z}{v_c}, \text{dan } \bar{t} = \frac{t}{T}.$$

Dengan mensubstitusi variabel-variabel tak berdimensi ke dalam persamaan (2.5), maka diperoleh

$$\rho\frac{v_c}{T}\left(\frac{\partial \bar{v_z}}{\partial \bar{t}}\right) = G + \mu\left(\frac{v_c}{R^2}\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\left(\bar{r}\,\frac{\partial \bar{v_z}}{\partial \bar{r}}\right)\right). \tag{2.6}$$

Diambil $v_c = \frac{GR^2}{\mu}$ dan $T = \frac{\rho R^2}{\mu}$. Oleh karena itu, persamaan (2.6) ditulis menjadi

$$\frac{\partial \overline{v_z}}{\partial \bar{t}} = 1 + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \ \frac{\partial \overline{v_z}}{\partial \bar{r}} \right) \tag{2.7}$$

Kondisi batas untuk (2.7) yaitu:

1. $\overline{v_z} = 0$ pada $\bar{r} = 1$ untuk semua $\bar{t}$ $(2.8\ a)$
2. $\overline{v_z}$ bernilai terbatas saat $\bar{t} = 0$ untuk semua $\bar{r}$ $(2.8\ b)$
3. $\overline{v_z} = 0$ saat $\bar{t} = 0$ untuk semua $\bar{r}$ $(2.8\ c)$

Leal (2007) mengungkapkan agar mempermudah dalam pencarian solusi, $\overline{v_z}$ akan diubah ke dalam bentuk variabel baru yaitu $\bar{w}(\bar{r}, \bar{t})$. Variabel $\bar{w}(\bar{r}, \bar{t})$ dipilih sebagai selisih dari $\overline{v_z}(\bar{r}, \bar{t})$ dan $\overline{v_z}$, dimana $\overline{v_z}$ adalah solusi persamaan (2.7) pada kondisi setimbang. Keadaan setimbang tersebut diperoleh dengan mengasumsikan $\frac{\partial \overline{v_z}}{\partial \bar{t}} = 0$ pada persamaan (2.7) dan menggunakan kondisi (2.8 a). Berdasarkan hal tersebut, $\bar{w}(\bar{r}, \bar{t})$ dapat dinyatakan sebagai

$$\bar{w}(\bar{r}, \bar{t}) = \overline{v_z}(\bar{r}, \bar{t}) - \frac{1}{4}(1 - \bar{r}^2) \tag{2.9}$$

Dengan mensubstitusi persamaan (2.9), ke persamaan (2.7 dan (2.8) maka diperoleh

$$\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} \right) = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{r}} \right) \tag{2.10}$$

Dengan syarat batas:

1. $\bar{w} = 0$ pada $\bar{r} = 1$ untuk semua $\bar{t}$ $(2.11\ a)$
2. $\bar{w}$ bernilai terbatas saat $\bar{r} = 0$ untuk semua $\bar{t}$ $(2.11\ b)$
3. $\bar{w} = -\frac{1}{4}(1 - \bar{r}^2)$ saat $\bar{t} = 0$ untuk semua $\bar{r}$ $(2.11\ c)$

Persamaan (2.10) yang mengandung dua variabel $\bar{r}$ dan $\bar{t}$ yang dapat diselesaikan dengan menggunakan metode pemisahan variabel (Leal, 2007). Misalkan $S(\bar{r})$ adalah fungsi yang bergantung terhadap jari-jari pembuluh darah $\bar{r}$ dan $\Theta(\bar{t})$ adalah fungsi yang bergantung waktu $\bar{t}$. Pemisalan tersebut ditulis menjadi

$$\bar{w}(\bar{r}, \bar{t}) = S(\bar{r})\Theta(\bar{t}) \tag{2.12}$$

Dengan mensubstitusi persamaan (2.12) ke persamaan (2.10), maka diperoleh:

$$\frac{1}{\Theta}\frac{d\Theta}{d\bar{t}} = \frac{1}{S}\left[\frac{1}{\bar{r}}\frac{d}{dr}\left(\bar{r}\frac{dS}{d\bar{r}}\right)\right] \tag{2.13}$$

Leal (2007) mengungkapkan bahwa ruas kiri persamaan (2.13) hanya bergantung pada variabel $\bar{t}$ dan ruas kanan hanya bergantung pada variabel $\bar{r}$ sehingga kedua ruas tersebut akan bernilai sama dengan sebarang konstanta. Pilih konstanta $-\lambda^2$, maka diperoleh solusi untuk ruas kiri (2.13) yaitu

$$\Theta = e^{-\lambda^2\bar{t}} \tag{2.14}$$

Sedangkan untuk ruas kanan (2.13) dapat ditulis menjadi

$$\bar{r}^2\frac{d^2S}{d\bar{r}^2} + \bar{r}\frac{dS}{d\bar{r}} + \lambda^2\bar{r}^2 S = 0 \tag{2.15}$$

Leal (2007) mengungkapkan bahwa untuk mempermudah pencarian solusi, akan dipilih variabel q sebagai

$$q = \lambda\bar{r}. \tag{2.16}$$

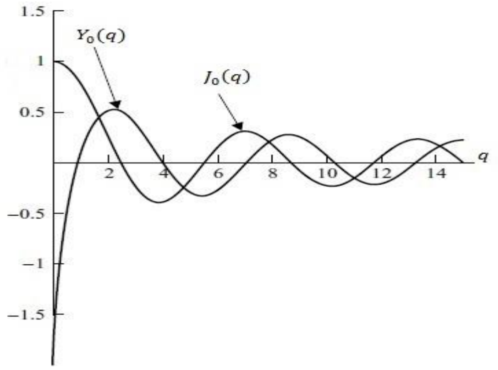
Persamaan (2.15) menjadi

$$q^2\frac{d^2S}{dq^2} + q\frac{dS}{dq} + q^2 S = 0. \tag{2.17}$$

Persamaan (2.17) adalah persamaan differensial Bessel order 0 yang mempunyai dua solusi yang disebut fungsi Bessel, yaitu $S = J_0(\lambda\bar{r})$ dan $S = Y_0(\lambda\bar{r})$ (Leal, 2007). Oleh karena itu diperoleh dua buah solusi

$$\bar{w}(\bar{r},\bar{t}) = e^{-\lambda^2\bar{t}}Y_0(q)$$

$$\bar{w}(\bar{r},\bar{t}) = e^{-\lambda^2\bar{t}}J_0(q)$$



Gambar 2. Grafik fungsi Bessel $Y_0(q)$ dan $J_0(q)$

Karakteristik fungsi Bessel jenis pertama dan jenis kedua berorder nol ($Y_0(q)$ dan $J_0(q)$) dapat ditunjukkan oleh grafik pada Gambar 2. Berdasarkan Gambar 2, nilai dari $Y_0(0)$ adalah $-\infty$, dan nilai dari $J_0(0)$ adalah 1. Oleh karena itu, $\bar{w}(\bar{r},\bar{t})$ yang harus dipilih sehingga sesuai dengan kondisi (2.11 b) adalah

$$\bar{w}(\bar{r},\bar{t}) = e^{-\lambda^2\bar{t}} J_0(q). \tag{2.18}$$

Nilai λ dapat diperoleh dengan menerapkan syarat batas (2.11 a). Dengan kata lain λ adalah pembuat nol fungsi Bessel $J_0(q)$, yang berdasarkan grafik pada Gambar 2, nilainya tidak unik. Sehingga diperoleh

$$\bar{w}_n(\bar{r},\bar{t}) = e^{-\lambda_n{}^2\bar{t}} J_0(\lambda_n\bar{r}) = 0 \qquad n = 1,2,3,\ldots \tag{2.19}$$

Karena persamaan (2.10) bersifat linear, maka solusi $\bar{w}$ ditulis sebagai kombinasi linear dari $\bar{w}_n$ yaitu

$$\bar{w}(\bar{r},\bar{t}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \bar{w}_n(\bar{r},\bar{t}), \tag{2.20}$$

dimana A_n, $n = 1, 2, \ldots \infty$ adalah konstanta. Nilai A_n dapat diperoleh dengan menerapkan nilai awal (2.11 c), yaitu

$$\bar{w}(\bar{r},0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n\bar{r}) = -\frac{1}{4}(1-\bar{r}^2) \tag{2.21}$$

Semua ruas pada persamaan (2.21) dikalikan dengan $\bar{r}J_0(\lambda_m\bar{r})$ dan masing-masing diberi operator integral terhadap $\bar{r}$ dengan batas 0 hingga 1.

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \bar{r} J_0(\lambda_n \bar{r}) J_0(\lambda_m \bar{r})\, d\bar{r} = -\frac{1}{4}\int_0^1 \bar{r}(1-\bar{r}^2) J_0(\lambda_m \bar{r})\ d\bar{r} \qquad (2.22)$$

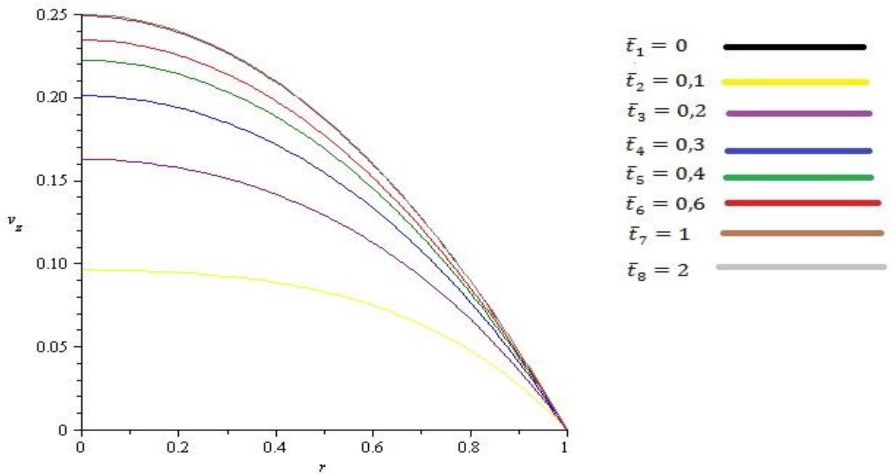
Dengan menggunakan sifat-sifat fungsi Bessel, nilai A_n dapat diperoleh yaitu

$$A_n = \frac{-\frac{1}{4}\int_0^1 \bar{r}(1-\bar{r}^2) J_0(\lambda_n \bar{r})\ d\bar{r}}{\int_0^1 \bar{r}\,[J_0(\lambda_n \bar{r})]^2\, d\bar{r}}\,. \qquad (2.23)$$

$$A_n = -\frac{2}{{\lambda_n}^3}[J_1(\lambda_n)]^{-1}\,, \qquad (2.24)$$

dimana J_1 adalah fungsi Bessel jenis pertama orde 1. Solusi dari model matematika untuk kecepatan aliran darah dalam satu arah pada sumbu z (persamaan (2.7)) adalah

$$\bar{v_z}(\bar{r},\bar{t}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\bar{r}^2 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^3}[J_1(\lambda_n)]^{-1} e^{-{\lambda_n}^2 \bar{t}} J_0(\lambda_n \bar{r}) \qquad (2.25)$$



Gambar 3 Grafik $\bar{v_z}(\bar{r},\bar{t})$ untuk $\bar{r} \in [0,1]$ dan $\bar{t} = 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 1; 2$

Pada Gambar 3, disajikan grafik dari persamaan (2.25) untuk beberapa nilai waktu $\bar{t}$. Berdasarkan Gambar 3, berawal dari profil $\bar{v_z}(\bar{r},0) = 0,$ nilai kecepatan $\bar{v_z}(\bar{r},\bar{t})$ berubah dan mempunyai nilai maksimum pada $\bar{r} = 0$ untuk setiap $\bar{t}$. Sesuai dengan syarat batas $\bar{v_z}(1,\bar{t}) = 0$, kecepatan $\bar{v_z}(\bar{r},\bar{t})$ tetap bernilai nol pada $\bar{r} = 1$. Profil $\bar{v_z}(\bar{r},\bar{t})$ tidak mengalami perubahan ketika $\bar{t} \geq 1$. Dengan kata lain, $\bar{v}_z(\bar{r},\bar{t})$ telah mencepai keadaan steady state atau keadaan setimbang, dengan bentuk $\bar{v}_z(\bar{r}) = \frac{1}{4}(1-\bar{r}^2)$.

Model kecepatan aliran darah dengan variabel berdimensi jari-jari r dan waktu t untuk $0 \le r \le R$ dan $0 \le t \le T$, adalah

$$v_z = \frac{GR^2}{\mu}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^3}[J_1(\lambda_n)]^{-1}e^{-\lambda_n{}^2\frac{t}{T}}J_0\left(\lambda_n\frac{r}{R}\right)\right] \tag{2.26}$$

Berdasarkan persamaan (2.26), besarnya kecepatan aliran darah v_z dipengaruhi oleh konstanta gradien tekanan darah G, jari-jari pembuluh darah R, serta kekentalan darah μ.

4. KESIMPULAN

Kesimpulan dari penelitian ini yaitu:

a) Model kecepatan aliran darah dengan aliran satu arah pada sumbu z yaitu

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}\right) = G + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right),$$

dengan nilai awal dan syarat batas yakni:

- $v_z = 0$ saat $r = R$ untuk semua t,
- $v_z = 0$ saat $t = 0$ untuk semua r,
- v_z bernilai terbatas saat $r = 0$ untuk semua t.

b) Solusi dari model kecepatan aliran darah untuk $0 \le r \le R$ dan $0 \le t \le T$, yaitu

$$v_z(r,t) = \frac{GR^2}{\mu}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^3}[J_1(\lambda_n)]^{-1}e^{-\lambda_n{}^2\frac{t}{T}}J_0\left(\lambda_n\frac{r}{R}\right)\right]$$

c) Gradien tekanan darah G, jari-jari pembuluh darah R serta kekentalan darah μ mempengaruhi besarnya kecepatan aliran darah.

DAFTAR PUSTAKA

Aaronson, W. (2007). *At a Glance Ssystem Kardiovaskular. Edisi 3.* Jakarta: Erlangga.

Boas, E. A. (2008). *Mathematical Methods in the Physical Sciences.* Milton: John Wiley & Sons, Inc.

Cahya, E. (2011). *Persamaan Differensial Biasa Suatu Pengantar*. Bandung: Prodi Pendidikan Matematika FPMIPA UPI.

Cengel, Y. A. (2012). *Differential Equations for Engineers and Scientists.* New York: Mc Graw-Hill.

Fox, M. P. (2012). *Fluid Mechanics. Edisi 8.* Milton: John Wiley & Sons, Inc.

Hoefnagles, M. (2013). *Biology The Essentials.* New York: McGraw-Hill.

Labadin. J, A. A. (2006). Mathematical Modeling of the Arterical Blood Flow. *2nd IMT-GT Regional Conference on Mathematics, Statistics, and Application*, 1-7.

Leal, G. L. (2007). *Advanced Transport Pheniomena.* New York: Cambridge.

Munson. R, B. d. (2003). *Mekanika Fluida.* Jakarta: Erlangga.

Purcell, E. J. (2003). *Kalkulus. Edisi 8. Jilid 2.* Jakarta: Erlangga.

Ross, S. L. (2010). *Differential Equations Third Edition.* New Delhi: Wiley India.

Wahyu. (2009). *Sistem Peredaran Darah pada Manusia* . Bandung: Puri Delco.

White, F. M. (2009). *Mekanika Fluida Edisi Kedua Jilid 1.* Jakarta: Erlangga.