SIFAT-SIFAT DASAR INTEGRAL SL DI RUANG RIESZ YANG LENGKAP DEDEKIND

Rizki Pramasta[1)], Encum Sumiaty[2)], Sumanang Muhtar Gozali[3)]

[1), 2), 3)] Departemen Pendidikan Matematika FPMIPA UPI

*Surel: rizkipramasta@gmail.com

ABSTRAK. Bermula dari sebuah ruang vektor yang terurut parsial, didefinisikan ruang Riesz yang memenuhi kondisi tertentu. Didefinisikan pula ruang Riesz yang mempunyai supremum di setiap himpunan bagian tak kosong yang terbatas keatas, yang selanjutnya ruang ini dinamakan ruang Riesz yang lengkap Dedekind. Berdasarkan definisi tersebut, dikaji mengenai konsep integral SL di ruang Riesz yang lengkap Dedekind serta sifat-sifat dasar yang berlaku. Selain itu, dikaji pula fungsi SL atau fungsi yang memiliki sifat SL sebagai fungsi primitif dari fungsi yang terintegralkan SL.

Kata Kunci: Ruang Riesz yang lengkap Dedekind, Integral SL, Fungsi SL.

ABSTRACT. *Starting from a partially ordered vector space, defined Riesz space that certain condition. Similarly defined Riesz space which has a supremum in every non-empty subset is bounded from above, hereinafter this space is called Dedekind complete Riesz space. Based on these definitions, introduced the concept of (SL)-integral in Dedekind complete Riesz space as well as the basic properties that apply. Besides that, also introduced (SL)-function or function has property (SL) as a primitive function of the function is (SL)-integrable.*

Keywords*: Dedekind complete Riesz space, (SL)-integral, (SL)-function.*

1. PENDAHULUAN

Perkembangan dan perluasan integral Riemann telah banyak dikaji, seperti integral Lebesgue yang diperkenalkan oleh Henry Lebesgue pada tahun 1902, yang membuat fungsi-fungsi yang tidak terintegralkan Riemann menjadi dapat terintegralkan [6]. Umumnya pada perluasan Integral Riemann, beberapa integral yang ditemukan didefinisikan secara deskriptif. Pendefinisian secara deskriptif dilakukan dengan menggunakan sebuah fungsi yang menjadi antiderivatif dari fungsi yang terintegralkan.

Perluasan lainnya sampai pada temuan integral untuk fungsi di ruang Riesz yang lengkap Dedekind [5], salah satunya yaitu integral SL(Strong Luzin). Awal pendefinisian integral SL adalah memperkenalkan fungsi yang menjadi antiderivatif dari suatu fungsi yang terintegralkan SL, fungsi tersebut temasuk ke dalam kelas SL [3], [4]. Pada definisi integral SL, istilah antiderivatif diganti dengan primitive lemah.

Derivatif pada integral SL berbeda dengan derivatif pada umumnya yang biasa dijumpai pada integral real, yaitu menggunakan definisi (u)-derivatif dengan u sebuah unit di ruang Riesz yang lengkap Dedekind [3]. Misalkan f, g sebuah fungsi dengan f adalah (u)-derivatif dari g, jika g fungsi SL maka f teintegralkan SL dengan g sebagai primitif lemah dari f. Semua fungsi yang mempunyai (u)-derivatif juga mempunyai derivatif, namun tidak berlaku sebaliknya kecuali jika $\mathbb{R}$ sebagai ruang Riesz yang lengkap Dedekind, konsep derivatif akan ekivalen dengan (u)-derivatif.

Dalam artikel ini, penulis mencoba menganalisa lebih mendalam tentang fungsi yang terintegralkan SL serta sifat-sifat apa saja yang berlaku pada integral SL di ruang Riesz yang lengkap Dedekind. Namun sebelumnya, terlebih dahulu dikemukakan mengenai pengantar ruang Riesz dan fungsi yag termasuk kedalam kelas SL.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Suatu relasi R dikatakan partial ordering atau pengurutan parsial di X apabila memenuhi: 1) Jika xRy dan yRz maka xRz, untuk $x, y, z \in X$; 2) $xRx, \forall\, x \in X$; 3) Jika xRy dan yRx maka $x = y$, untuk $x, y \in X$.. Lalu himpunan $\mathcal{D}$ yang dilengkapi dengan suatu relasi pengurutan parsial R

di $\mathcal{D}$ disebut *partially ordered set* atau himpunan terurut parsial, dan dinotasikan dengan $(\mathcal{D}, R)$. Sebuah himpunan terurut parsial $\mathcal{D}$ dikatakan himpunan terarah keatas (kebawah) jika untuk sebarang dua elemen $a, b \in \mathcal{D}$, terdapat $c \in \mathcal{D}$ sedemikian sehingga $c \geq a$ dan $c \geq b (c \leq a$ dan $c \geq b)$.

Misalkan L ruang vektor real dengan anggota $f, g, \dots$, maka L disebut ruang vektor terurut jika L terurut parsial yang bergantung pada suatu pengurutan parsial yang bersesuaian, dan memenuhi kondisi dibawah ini: 1) $f \leqq g$ mengakibatkan $f + h \leqq g + h$ untuk setiap $h \in L$; 2) $f \geqq 0$ mengakibatkan $af \geqq 0$ untuk setiap $a \geqq 0$.

Sebuah ruang vektor terurut L disebut sebuah ruang Riesz jika untuk setiap pasangan $f, g \in L$, terdapat $\sup(f, g)$ di L yang bergantung pada suatu pengurutan parsial yang bersesuaian. Lalu Sebuah ruang Riesz L dikatakan *Dedekind complete Ries*z atau Riesz yang lengkap Dedekind jika untuk setiap himpunan bagian yang tak kosong dari L yang terbatas diatas mempunyai supremum [5]. Selanjutnya apabila L Riesz yang lengkap Dedekind maka $\bar{L}$ menotasikan himpunan $L \cup \{+\infty\}$, dan salah satu contoh ruang Riesz yang lengkap Dedekind adalah $(\mathbb{R}^n, \geq)$.

Selanjutnya dipaparkan pula konsep net, yaitu sebuah fungsi $\phi : \mathcal{D} \to X$ atau $(X_a)_{a \in \mathcal{D}}$ dengan $\mathcal{D}$ merupakan himpunan terurut parsial yang terarah keatas atau kebawah [7]. Dengan ini, dapat dikatakan net merupakan perumuman dari barisan. Sebuah net $(p_\delta)_{\delta \in \Delta}$ dari elemen di $\bar{L}$ dikatakan (o)-*net* atau net terurut jika memenuhi dua kondisi dibawah ini:

1) $p\delta_1 \leq p\delta_2$ dimana $\delta_1, \delta_2 \in \Delta, \delta_1 \leq \delta_2$;

2) $\inf \{p\delta \mid \delta \in \Delta\} = 0$.

Lalu sebuah barisan $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di $\bar{L}$ dikatakan (o)-*sequence* atau barisan terurut jika barisan tersebut menurun dan $\inf_{n \in \mathbb{N}} \{p_n\} = 0$ [3], [4].

Fungsi SL

Misalkan L sebarang ruang Riesz yang lengkap Dedekind, $J \subset [a, b] \subset \mathbb{R}$, dan $\Delta_J = (\mathbb{R}^+)^J$. Fungsi $P : [a, b] \to L$ disebut fungsi SL pada J jika untuk setiap himpunan $N \subset [a, b]$ yang berukuran Lebesgue nol, terdapat net terurut $(p\delta^{(N)})_{\delta \in \Delta_J}$ sedemikian sehingga

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|P(x_i) - P(x_{i-1})| \;\middle|\; \begin{matrix}([x_{i-1}, x_i], \xi_i) \text{ penghalusan} - \delta \text{ dekomposisi} \\ \text{pada } [a,b], x_i \in [a,b] \text{ dan } \xi_i \in N \cap J, \forall\, i\end{matrix}\right\}$$
$$\leq p\delta^{(N)}$$

Ruang Riesz yang lengkap Dedekind, selanjutnya dinotasikan dengan L.

Proposisi 3.1[3] Jika $P : [a,b] \to L$ kontinu mutlak pada a, b maka P merupakan fungsi SL pada a, b.

Selanjutnya terdapat proposisi yang menunjukkan bahwa hanya cukup dengan sifat kekontinuanya saja dapat menjadi fungsi SL.

Proposisi 3.2[3] Jika $P : [a,b] \to L$ kontinu di $x_0 \in [a,b]$ maka P merupakan fungsi SL pada $\{x_0\}$.

Integral SL

Misalkan $\Delta^{(1)}$ adalah himpunan semua gage yang terdefinisi pada $[a,b]$. Fungsi $P : [a,b] \to L$ dikatakan terintegralkan SL jika terdapat sebuah fungsi $P : [a,b] \to L$ fungsi SL dan sebuah net terurut $(p_\delta)_{\delta\in\Delta^{(1)}}$ sedemikian sehingga

$$\sup\left\{\left|S(f,E) - \sum_{i=1}^{n}[P(x_i) - P(x_{i-1})]\right| \;\middle|\; \begin{matrix} E = \{([x_{i-1}, x_i], \xi_i) | i = 1,2,\dots,n\} \\ \text{penghalusan} - \delta \text{ dekomposisi pada } [\mathrm{a,b}]\end{matrix}\right\}$$
$$\leq p_{\delta.}$$

Fungsi P disebut primitif lemah dari f, dan dituliskan $(SL)\int_a^b f = P(b) - P(a)$.

Proposisi 4.1[3] Diberikan $N \subset [a,b]$ sebuah himpunan berukuran Lebesgue nol dan $f_0 : [a,b] \to L$ sedemikian sehingga $f_0(x) = 0$ untuk semua $x \notin N$.. Misalkan $P_0 : [a,b] \to L$ fungsi konstan maka P_0 merupakan primitif lemah dari f_0.

Proposisi 4.2[3] Diberikan $N \subset [a,b]$ sebuah himpunan berukuran Lebesgue nol dan $f_0 : [a,b] \to L$ sedemikian sehingga $f_0(x) = 0$ untuk semua $x \notin N$. Misalkan $P_0 : [a,b] \to L$ merupakan primitif lemah dari f_0 maka P_0 fungsi konstan.

Selanjutnya terdapat beberapa konsekuensi yang cukup jelas dari Proposisi 4.1 dan Proposisi 4.2 yakni sebagai berikut:

Proposisi 4.3[3] Diberikan $N \subset [a, b]$ sebuah himpunan berukuran Lebesgue nol dan $f_0 : [a, b] \to L$ sedemikian sehingga $f_0(x) = 0$ untuk semua $x \notin N$, maka

$$(SL) \int_a^b f_0 = 0$$

Bukti:

Misalkan fungsi $P_0 : [a, b] \to L$.

Jika P_0 fungsi konstan, berdasakan Proposisi 5.10 maka P_0 merupakan primitif lemah dari f_0 dan dapat ditulis $(SL) \int_a^b f_0 = P(b) - P(a) = 0$. Jika P_0 bukan fungsi konstan, berdasarkan Proposisi 5.11 maka P_0 bukan primitif lemah dari f_0.

Sehingga hanyalah P_0 fungsi konstan yang mengakibatkan P_0 menjadi primitif lemah dari f_0. Dengan demikian diperoleh $(SL) \int_a^b f_0 = 0$.

Proposisi 4.4[3] Misalkan $f, g : [a, b] \to L$ adalah dua fungsi yang hanya berbeda nilai pada himpunan yang berukuran Lebesgue nol, maka f terintegralkan SL jika dan hanya jika g terintegralkan SL, dan ditulis

$$(SL) \int_a^b f = (SL) \int_a^b g$$

Proposisi 4.5[3] Diberikan $f : [a, b] \to L$ sebuah fungsi yang terintegralkan SL. Misalkan fungsi P_1 dan P_2 merupakan primitif lemah dari f, maka $P_1(\beta) - P_1(\alpha) = P_2(\beta) - P_2(\alpha)$ untuk semua α, β dengan $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$.

3. PENUTUP

Dalam artikel ini hanya mengkaji mengenai sifat-sifat dasar integral SL di ruang Riesz yang lengkap Dedeind. Terlihat bahwa masih banyak hal yang dapat dibahas dan dikembangkan untuk penelitian lebih lanjut. Kelanjutan integral SL disarankan dibahas pula fungsi yang terintegralkan SL secara serentak dan beberapa teorema kekonvergenan integral SL, serta dapat pula dibahas ekivalensi integral SL dengan integral lainnya di ruang Riesz yang lengkap Dedekind.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Bartle, R. G. (1995). The Elements of Integration and Lebesgue Measure. Canada: John Willey and Sons.

[2] Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). Introduction to Real Analysis (Fourth Edition). New York: John Willey and Sons.

[3] Boccuto, A. (1998). Differential and Integral Calculus in Riesz Space. Tatra Mountains , 293-323.

[4] Buccuto, A., & Riecan, B. (2006). Convergence theorems for the (SL)-integral in the Riesz space-context. Mathematica Slovaca , hlm. 1-28.

[5] Luxemberg, W. A., & Zaanen, A. C. (1971). Riesz Space. Amsterdam: NorthHolland Publishing Company.

[6] Royden, H. L., & Fitzpatrick, P. M. (2009). Real Analysis (Fourth Edition). China: China Machine Press.

[7] Vulikh, B. Z. (1967). Introduction to the theory of partially ordered spaces. Gronigen: Wolters - Noordhoff Science Publications.