PENYELESAIAN MASALAH PENUGASAN MULTI OBJEKTIF DENGAN METODE *WEIGHTED-SUM* DAN METODE *ε-CONSTRAINT*

Risyani A. Rahayu[1)], Khusnul Novianingsih[2)], Husty Serviana H.[3)]

[1), 2), 3)] Departemen Pendidikan Matematika FPMIPA UPI

*Surel: risyaniar@yahoo.com

ABSTRAK. Masalah penugasan multi objektif adalah suatu masalah penugasan yang memiliki lebih dari satu fungsi tujuan yang dioptimalkan. Salah satu pendekatan yang digunakan untuk menyelesaikan masalah tersebut adalah dengan mengubah fungsi tujuan multi objektif menjadi satu fungsi tujuan. Pada penelitian ini kami menggunakan metode *weighted-sum* dan metode *ε-constraint* untuk mengubah fungsi tujuan multi objektif menjadi satu fungsi tujuan. Penyelesaian masalah penugasan multi objektif dengan metode *weighted-sum* adalah mengubah fungsi multi objektif menjadi satu fungsi tujuan dengan memberikan bobot pada masing-masing fungsi objektif secara skalar. Metode *ε-constraint* mengharuskan memilih salah satu fungsi tujuan yang akan dioptimalkan, sedangkan fungsi tujuan lainnya dijadikan sebagai pembatas yang kurang atau lebih dari sama dengan nilai target yang diberikan. Berdasarkan hasil implementasi dari metode *weighted-sum* dan metode *ε-constraint* dapat disimpulkan bahwa solusi terbaik diperoleh dari metode *weighted-sum*. Untuk mendapatkan solusi terbaik pada metode *weighted-sum* diharuskan mencoba beberapa kombinasi bobot yang berlainan.

Kata Kunci: Masalah Penugasan, Multi Objektif, Metode *Weighted-Sum*, Metode *ε-Constraint*, Solusi Optimal.

ABSTRACT. *A multi objective assignment problem is an assignment problem that has more than one objective function that should be optimized. One of approaches used to solve the problem is to change the multi objective function to one objective function. In this research, we use weighted-sum method and ε-constraint method to convert the objective functions to one objective function. Weighted-sum method converts the functions by giving weight for each function. Ɛ-constraint method chooses one objective function to be optimized while the other functions are to be the constraints of the model. The results show that the best solution is obtained by the weighted-sum method. However, this method need a number of experiment to obtain the optimal weights.*

Keywords: *Assignment Problem, Multi Objective, Wighted-Sum Method, ε-*Constraint *Method, Optimal Solution.*

1. PENDAHULUAN

Masalah penugasan (*assignment problem*) adalah masalah yang berkaitan dengan keterbatasan sumber daya yang harus didistribusikan ke berbagai tujuan, aktivitas, maupun kebutuhan. Masalah ini dapat dianalogikan sebagai masalah pemasangan m buah pekerjaan (atau pekerja) ke n buah mesin sehingga total biaya penugasan yang dibutuhkan seminimum mungkin.

Secara umum, masalah penugasan dapat dimodelkan sebagai model program linear dengan satu fungsi tujuan, yaitu total biaya penugasan setiap pekerja ke setiap mesin. Saat ini, masalah penugasan tersebut telah dikembangkan menjadi masalah penugasan dengan fungsi tujuan banyak atau masalah penugasan multi objektif. Fungsi tujuan yang akan dioptimalkan dari model penugasan ini tidak hanya terkait dengan total biaya penugasan saja, tetapi sekaligus mengoptimalkan pendapatan, jarak tempuh atau waktu produksi.

Misalkan Z_k adalah fungsi tujuan ke-k, c_{kij} adalah biaya (pada fungsi tujuan ke-k) yang dibutuhkan untuk menugaskan pekerja i ke mesin j, dan didefinisikan variabel keputusan berikut:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ , jika pekerjaan } i \text{ ditugaskan ke mesin } j. \\ 0 \text{ , jika pekerjaan } i \text{ tidak ditugaskan ke mesin } j. \end{cases}$$

Maka masalah penugasan multi objektif dapat diekspresikan dalam model:

Mengoptimalkan:

$$Z_1 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{1ij}.x_{ij}$$
$$Z_2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{2ij}.x_{ij}$$
$$\vdots$$
$$Z_k = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{kij}.x_{ij}$$
$$k \in \mathbb{Z}^+$$

dengan batasan:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, 2, \dots, m$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1, 2, \dots, n$$
$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

Masalah penugasan multi objektif adalah suatu masalah penugasan yang memiliki lebih dari satu tujuan untuk dioptimalkan terhadap beberapa jenis sumber daya yang dimiliki oleh pekerja dalam menyelesaikan suatu tugas. Penyelesaian masalah penugasan multi objektif ditujukan untuk mencari solusi yang optimal dari suatu kasus penugasan. Biasanya masalah ini ditemukan pada perusahaan-perusahaan produksi diantaranya adalah pengoptimalan biaya produksi, biaya pengiriman produk, waktu produksi, jarak pengiriman produk, kualitas produk, dan lain-lain. Pada artikel ini dibahas masalah penugasan multi objektif dengan tiga fungsi tujuan yang akan dioptimalkan yaitu biaya produksi, waktu produksi, dan kualitas produk yang dihasilkan.

Masalah optimisasi multi objektif termasuk dalam klasifikasi masalah yang sulit diselesaikan dengan metode-metode eksak. Salah satu pendekatan yang digunakan untuk menyelesaikan masalah tersebut adalah dengan mengubah fungsi tujuan multi objektif menjadi satu fungsi tujuan. Beberapa metode yang digunakan untuk mengubah fungsi tujuan multi objektif menjadi satu fungsi tujuan adalah metode *weighted-sum* dan metode *ε-constraint.*

Penyelesaian masalah penugasan multi objektif dengan metode *weighted-sum* adalah mengubah fungsi multi objektif menjadi satu fungsi tujuan dengan memberikan bobot pada masing-masing fungsi objektif secara skalar. Metode ini terkait dengan multi objektif *integer programming* yang ditemukan pada buku karangan Ehrgott pada tahun 2005 dan *paper* karya Ehrgott tahun 2006 yang membahas mengenai metode penskalaran atau metode *weighted-sum* yang berbeda.

Metode *ε-constraint* mengharuskan memilih salah satu fungsi tujuan yang akan dioptimalkan, sedangkan fungsi tujuan lainnya dijadikan sebagai pembatas yang kurang atau lebih dari sama dengan nilai target yang diberikan. Metode ini diusulkan oleh Chankong dan Haimes pada 1983. Pada 1994 formulasi dari metode *ε-constraint* dikembangkan menjadi lebih umum oleh Miettinen.

2. PENYELESAIAN MASALAH PENUGASAN MULTI OBJEKTIF

Pada artikel ini, model penugasan multi objektif akan diselesaikan dengan cara mengubah fungsi tujuan multi objektif menjadi satu fungsi tujuan saja. Ada dua metode yang akan digunakan untuk mentransformasi beberapa fungsi objektif menjadi sebuah fungsi tujuan. Metode tersebut adalah metode *weighted-sum* dan metode *ε-constraint.*

2. 1. Metode *Weighted-Sum*

Metode *weighted-sum* bekerja dengan cara memberikan bobot pada masing-masing fungsi objektif. Sebagai ilustrasi, model optimisasi masalah penugasan multi objektif dengan metode tersebut adalah sebagai berikut:

Meminimumkan:

$$Z = \omega_1 \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{1ij}.x_{ij} + \omega_2 \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{2ij}.x_{ij} + \cdots + \omega_k \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{kij}.x_{ij}\,,$$

terhadap:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \qquad i = 1,2,\dots,m\,,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1,2,\dots,n\,,$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_k = 1\,,$$

$$\omega_i > 0, \quad i = 1,2,\dots,k,$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}\,.$$

Setelah model penugasan baru diperoleh, maka masalah penugasan multi objektif yang telah diubah menjadi satu fungsi tujuan diselesaikan dengan menggunakan algoritma Hungarian.

2. 2. Metode ε-*Constraint*

Pada bagian ini model penugasan multi objektif akan diselesaikan dengan menggunakan metode ε-*constraint*. Metode penyelesaian masalah penugasan multi objektif ini diharuskan untuk memilih satu fungsi tujuan dari semua fungsi tujuan yang harus diminimumkan. Sedangkan tujuan lainnya dijadikan sebagai pembatas yang kurang dari atau sama dengan nilai target yang diberikan.

Langkah pertama yang harus dilakukan adalah menyelesaikan masalah penugasan multi objektif sebagai masalah penugasan dengan satu fungsi untuk setiap tujuan. Misalkan:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{q-1} \\ \varepsilon_{q+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_k \end{pmatrix}$$

dimana ε adalah solusi optimal dari masing-masing fungsi tujuan masalah penugasan multi objektif dari data yang sudah dinormalkan. Model optimisasi masalah penugasan multi objektif diubah menjadi beberapa model matematik berikut:

Meminimumkan:

$$Z_q = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{qij} . x_{ij} \, ,$$

terhadap:

$$Z_p \leq \varepsilon_p, \forall \, p \in \{1, \dots, k\} \setminus \{q\},$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, 2, \dots, m \, ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1, 2, \dots, n \, ,$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \, .$$

Model-model matematik untuk masalah di atas selanjutnya diselesaikan dengan menggunakan TORA *software* untuk mendapatkan solusi yang optimal.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut ini adalah contoh-contoh dari penerapan metode *weighted-sum* dan metode ε-*constraint*.

Contoh 1: Misalkan diberikan data besaran biaya, waktu, dan kualitas dari lima buah kontraktor (A, B, C, D, E) terhadap lima buah pekerjaan (P1, P2, P3, P4, P5). Pada masalah ini, akan ditentukan pemasangan kontraktor terhadap pekerjaan yang meminimumkan nominal biaya, waktu, dan kualitas.

Tabel 1. Data Biaya, Waktu, dan Kualitas

		1	2	3	4	5	
Kontraktor	A	0,850	0,627	0,618	0,336	0,313	$\leftarrow c'_{ij}$
		0,948	0,948	0,850	0,882	0,863	$\leftarrow t'_{ij}$
		1,000	0,667	0,333	0,667	0,333	$\leftarrow q'_{ij}$
	B	0,810	0,725	0,532	0,283	0,236	
		1,000	0,915	0,895	0,850	0,850	
		0,667	0,333	0,667	1,000	0,667	
	C	0,936	0,819	0,576	0,403	0,224	
		0,915	0,902	0,882	0,869	0,850	
		0,333	0,333	0,667	0,333	0,667	
	D	1,000	0,671	0,632	0,412	0,348	
		0,974	0,882	0,915	0,850	0,882	
		0,333	0,667	0,333	0,333	0,333	
	E	0,734	0,762	0,511	0,309	0,281	
		0,915	0,850	0,882	0,863	0,850	
		1,000	0,333	0,667	0,667	0,667	

Ket: c'_{ij}= nominal biaya, t'_{ij} = nominal waktu, q'_{ij}= nominal kualitas.

Masalah penugasan berdasarkan data pada Tabel 1. dituliskan sebagai model optimisasi berikut:

Minimumkan:

$$
\begin{aligned}
Z_c = 0{,}850\, x_{11} &+ 0{,}627\, x_{12} + 0{,}618\, x_{13} + 0{,}336\, x_{14} + 0{,}313\, x_{15} + 0{,}810\, x_{21} \\
&+ 0{,}725\, x_{22} + 0{,}532\, x_{23} + 0{,}283\, x_{24} + 0{,}236\, x_{25} + 0{,}936\, x_{31} \\
&+ 0{,}819\, x_{32} + 0{,}576\, x_{33} + 0{,}403\, x_{34} + 0{,}224\, x_{35} + 1{,}000\, x_{41} \\
&+ 0{,}671\, x_{42} + 0{,}632\, x_{43} + 0{,}412\, x_{44} + 0{,}348\, x_{45} + 0{,}734\, x_{51} \\
&+ 0{,}762\, x_{52} + 0{,}511\, x_{53} + 0{,}309\, x_{54} + 0{,}281\, x_{55}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z_t = 0{,}948\, x_{11} &+ 0{,}948\, x_{12} + 0{,}850\, x_{13} + 0{,}882\, x_{14} + 0{,}863\, x_{15} + 1{,}000\, x_{21} \\
&+ 0{,}915\, x_{22} + 0{,}895\, x_{23} + 0{,}850\, x_{24} + 0{,}850\, x_{25} + 0{,}915\, x_{31} \\
&+ 0{,}902\, x_{32} + 0{,}882\, x_{33} + 0{,}869\, x_{34} + 0{,}850\, x_{35} + 0{,}974\, x_{41} \\
&+ 0{,}882\, x_{42} + 0{,}915\, x_{43} + 0{,}850\, x_{44} + 0{,}882\, x_{45} + 0{,}915\, x_{51} \\
&+ 0{,}850\, x_{52} + 0{,}882\, x_{53} + 0{,}863\, x_{54} + 0{,}850\, x_{55}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z_q = 1{,}000\, x_{11} &+ 0{,}667\, x_{12} + 0{,}333\, x_{13} + 0{,}667\, x_{14} + 0{,}333\, x_{15} + 0{,}667\, x_{21} \\
&+ 0{,}333\, x_{22} + 0{,}667\, x_{23} + 1{,}000\, x_{24} + 0{,}667\, x_{25} + 0{,}333\, x_{31} \\
&+ 0{,}333\, x_{32} + 0{,}667\, x_{33} + 0{,}333\, x_{34} + 0{,}667\, x_{35} + 0{,}333\, x_{41} \\
&+ 0{,}667\, x_{42} + 0{,}333\, x_{43} + 0{,}333\, x_{44} + 0{,}333\, x_{45} + 1{,}000\, x_{51} \\
&+ 0{,}333\, x_{52} + 0{,}667\, x_{53} + 0{,}667\, x_{54} + 0{,}667\, x_{55}
\end{aligned}
$$

terhadap:

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &= 1 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &= 1 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} &= 1 \\
x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} &= 1 \\
x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} &= 1 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} &= 1 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} &= 1 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} &= 1 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} &= 1 \\
x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} &= 1
\end{aligned}
$$

Berdasarkan dua metode yang telah dibahas akan dibandingkan setiap solusi optimalnya. Untuk metode *weighted-sum* diasumsikan bobot dari masing-masing fungsi tujuannya sama. Berikut adalah perbandingan setiap solusi optimal:

Tabel 2. Perbandingan Solusi Dua Metode Contoh 1

Metode *Weighted-Sum* dengan algoritma Hungarian			
	$x_{13} = x_{25} = x_{31} = x_{44} = x_{52} = 1$	$Z_c = 2{,}964$ $Z_t = 4{,}315$ $Z_q = 1{,}999$	$Z = 9{,}278$
Metode *ε-Constraint* dengan *software TORA*			
$\min Z_c$	$x_{14} = x_{25} = x_{32} = x_{43} = x_{51} = 1$	$Z_c = 2{,}757$ $Z_t = 4{,}464$ $Z_q = 3{,}000$	$Z = 10{,}221$
$\min Z_t$	$x_{15} = x_{24} = x_{32} = x_{41} = x_{53} = 1$	$Z_c = 2{,}926$ $Z_t = 4{,}471$ $Z_q = 2{,}666$	$Z = 10{,}063$
$\min Z_q$	$x_{14} = x_{25} = x_{33} = x_{41} = x_{52} = 1$	$Z_c = 2{,}910$ $Z_t = 4{,}438$ $Z_q = 2{,}667$	$Z = 10{,}015$

Kasus lainnya dari penerapan metode *weighted-sum* dan metode *ε-constraint* adalah sebagai berikut:

Contoh 2:

Misalkan akan diminimumkan dua buah fungsi tujuan:

$$Z_1 = 10\,x_{11} + 8\,x_{12} + 15\,x_{13} + 13\,x_{21} + 12\,x_{22} + 13\,x_{23} + 8\,x_{31} + 10\,x_{32} + 9\,x_{33}$$

$$Z_2 = 13\,x_{11} + 15\,x_{12} + 8\,x_{13} + 10\,x_{21} + 20\,x_{22} + 12\,x_{23} + 15\,x_{31} + 10\,x_{32} + 12\,x_{33}$$

terhadap:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1$$

Berdasarkan dua metode yang telah dibahas akan dibandingkan setiap solusi optimalnya. Untuk metode *weighted-sum* diasumsikan bobot dari masing-masing fungsi tujuannya sama. Berikut adalah perbandingan setiap solusi optimal:

Tabel 3. Perbandingan Solusi Dua Metode Contoh 2

Metode *Weighted-Sum* dengan algoritma Hungarian			
	$x_{13} = x_{21} = x_{32} = 1$	$Z_1 = 38$ $Z_2 = 28$	$Z = 66$
Metode *ε-Constraint* dengan *software TORA*			
$\min Z_1$	$x_{13} = x_{21} = x_{32} = 1$	$Z_1 = 38$ $Z_2 = 28$	$Z = 66$
$\min Z_2$	$x_{12} = x_{23} = x_{31} = 1$	$Z_1 = 29$ $Z_2 = 42$	$Z = 71$

Berdasarkan hasil implementasi dapat disimpulkan bahwa solusi terbaik diperoleh dengan menggunakan metode *weighted-sum* yang diselesaikan oleh algoritma Hungarian. Tetapi, metode tersebut butuh waktu yang cukup lama karena peneliti diharuskan untuk mencoba banyak kombinasi bobot yang berbeda untuk memperoleh solusi terbaik.

4. KESIMPULAN

Masalah optimisasi multi objektif dapat diselesaikan dengan metode *weighted-sum*. Cara kerja metode ini adalah dengan menggabungkan semua fungsi tujuan menjadi fungsi satu tujuan skalar dan memberi bobot pada masing-masing fungsi tujuan. Metode lain yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah penugasan multi objektif adalah metode *ε-constraint.* Metode ini bekerja dengan memilih satu fungsi tujuan dari semua fungsi tujuan yang harus diminimumkan. Sedangkan tujuan lainnya dijadikan sebagai pembatas yang kurang dari atau sama dengan nilai target yang diberikan. Berdasarkan hasil implementasi dari metode *weighted-sum* dan metode *ε-constraint* dapat disimpulkan bahwa solusi terbaik diperoleh dari metode *weighted-sum.*

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Caramia, M and Dell'Olmo, P. (2008). *Multi-Objective Management in Freight Logistics Increasing Capacity, Service Level and Safety with Optimization Algorithms*. XVI, 187 p. 32 illus., Hardcover. ISBN: 978-1-84800-381-1.

[2] Raharjo, D. (2010). *Proses Optimasi dan Idealisasi Masalah Penugasan Multi-Objective Menggunakan Metode Hungaria Pada Contoh Kasus Usaha Kerajinan Gitar di Ngrombo Baki Sukoharjo*. (Skripsi). FMIPA, Universitas Sebelas Maret, Semarang.

[3] Suyanto. (2010). *Algoritma Optimasi (Deterministik atau Probabilistik).* Yogyakarta: Penerbit Graha Ilmu

[4] Taha, H.A. (1971). *Operation Research: An Introduction*. New York: MacMillan Inc.