PRODUK SILANG TEREDUKSI DARI ALJABAR-C^* OLEH SEMIGRUP PADA AUTOMORFISMA

Nadia Shabilla, Rizky Rosjanuardi, Isnie Yusnitha

Departemen Pendidikan Matematika FPMIPA Universitas Pendidikan Indonesia

*Coresponding author: shabilla.nadia@yahoo.com

ABSTRAK: Gerard. J. Murphy (1991) mendefinisikan suatu sistem dinamik (A, M, α) terdiri dari A aljabar-C^* dan M semigrup dengan unsur identitas, dimana keduanya dihubungkan oleh aksi homomorfisma α oleh M pada automorfisma di A. Produk silang dari sistem dinamik (A, M, α), yaitu (B, ρ, V) terdiri dari aljabar- C^* B (yang selanjutnya dinotasikan dengan $A \rtimes_\alpha M$) dan pasangan (ρ, V) yang merupakan homomofisma kovarian di $A \rtimes_\alpha M$. Pada tulisan ini dipelajari tentang bentuk representasi isometrik reguler dari M semigrup kanselatif kanan (dengan unsur identitas) di ruang Hilbert $l^2(M, H)$ dan konstruksi produk silang $A \rtimes_\alpha M$ dari sistem dinamik (A, M, α), yang terdiri dari A aljabar-C^* unital dan M semigrup kanselatif kanan dengan identitas. Kemudian dikaji sifat universal dari produk silang $A \rtimes_\alpha M$ sehingga melahirkan produk silang tereduksi di (A, M, α).

Kata Kunci: Aljabar-C^*, Sistem Dinamik Aljabar-C^*, Produk Silang Aljabar-C^*, Produk Silang Tereduksi.

ABSTRACT: Gerard. J. Murphy (1991) defined a dynamical system (A, M, α) that contains a C^*-algebra A and a semigroup with identity element M of automorphism on A. The system (B, ρ, V) is a crossed product for dynamical system (A, M, α), that contains C^*-algebra B (it will be denoted as $A \rtimes_\alpha M$) and a covariant homomorphism which denoted as a pair (ρ, V). In this paper, we learn a regular isometric's form of right-cancellative semigroup (with identity element) M on Hilbert space $l^2(M, H)$, construction of crossed product $A \rtimes_\alpha M$ from a dynamical system (A, M, α) which contains a unital C^*-algebra A and right-cancellative semigroup (with identity element) M.Moreover, we investigate the universal property of a crossed product $A \rtimes_\alpha M$ that forms a reduced crossed product on (A, M, α).

Keyword: C^*-Algebra, C^*-Algebra Dynamical System, C^*-Algebra Crossed Product, Reduced Crossed Product.

PENDAHULUAN

Teori *Crossed Products* atau produk silang dari aljabar-C^* oleh grup pada automorfisma memiliki peranan penting pada teori aljabar operator. Produk silang pada aljabar-C^* oleh grup dari automorfisma biasa disebut produk silang yang klasik. Beberapa ilmuwan matematika telah mengembangkan teori produk silang menjadi bentuk non-klasik yang semakin menarik untuk ditelaah, diantaranya [1], [3], [4], [5], [6], [7] dan [8].

Gerard J. Murphy pada papernya yang berjudul *Ordered Groups and Crossed Products of C*-algebras* (1991) telah mengenalkan sekaligus mengembangkan konsep baru dari teori produk silang pada aljabar-*C** yaitu teori produk silang oleh semigrup dari automorfisma. Dalam paper tersebut, terdapat proposisi sifat universal dari produk silang aljabar-*C** dimana dalam pembuktiannya didefinisikan suatu representasi kovarian yang diinduksi dari represantasi di aljabar-*C** A. Dengan menggunakan sifat universal dari produk silang, untuk setiap representasi kovarian yang diinduksi dari representasi di A akan terdapat homomorfisma-* yang unik, dimana peta dari homomorfisma-* tersebut membentuk suatu aljabar- *C** baru yaitu produk silang tereduksi.

PRODUK SILANG PADA ALJABAR-C^*

Misalkan G grup abelian dan X suatu himpunan. Aksi dari G pada X adalah pemetaan $\varphi: G \times X \to X$, $(g, x) \longmapsto g$ yang memenuhi:
(i) $u_G x = x$, $\forall x \in X$ dimana u_G unsur identitas dari G,
(ii)$s(t\ ) = (s\ )x$, $\forall s, t \in G, x \in X$.

Jika G adalah grup topologi dan X adalah ruang topologi, maka aksi tersebut dikatakan kontinu jika $(g, x) \longmapsto g$ adalah kontinu.

Definisi 3.1: Sistem Dinamik[1]
Misal G adalah grup, A adalah aljabar-*C** dan didefinisikan $\mathrm{Aut}(A) \coloneqq \{\varphi: A \to A | \varphi \text{ isomorfisma} -*\}$. Grup G dikatakan beraksi pada A bila terdapat homomorfisma grup $\alpha: G \to \mathrm{Aut}(A)$. Selanjutnya sistem (A, G, α) dikatakan sebagai sistem dinamik dalam hal ini dua himpunan yang berbeda strukturnya, yaitu A dan G dihubungkan oleh aksi yang homomorfisma α.

Definisi 3.2: Representasi Kovarian[1]
Misalkan (A, G, α) adalah sistem dinamik yang terdiri dari aljabar-*C** A, grup G dan aksi α yang merupakan homomorfisma $\alpha: G \to \mathrm{Aut}(A)$. Sebuah representasi kovarian dari (A, G, α) adalah pasangan (π, V) dimana $\pi: A \to B(H)$ adalah representasi yang unital, dan $V: G \to U(H)$ representasi uniter yang memenuhi:

$$\pi\big(\alpha_x(a)\big) = V_x \pi(a) (V_x)^*, \qquad \forall x \in G, a \in A.$$

Definisi 3.3: Produk Silang[1]

Misalkan (A, G, α) adalah sistem dinamik yang terdiri dari aljabar-*C** A, grup G dan aksi yang homomorfisma $\alpha: G \to \mathrm{Aut}(A)$. Produk silang dari (A, G, α) adalah sistem (B, i_A, i_G) yang terdiri dari aljabar-*C** B (aljabar-*C** B dinotasikan dengan $A \rtimes_\alpha G$), homomorfisma unital $i_A: A \to A \rtimes_\alpha G$ dan homomorfisma $i_G: G \to A \rtimes_\alpha G$ yang memenuhi*:*

(i) Pasangan (i_A, i_G) adalah kovarian,

(ii) Untuk setiap representasi kovarian (π, V) dari (A, G, α) terdapat representasi unital $\pi \times V$ dari B sedemikian sehingga $(\pi \times V)^\circ i_A = \pi$ dan $(\pi \times V)^\circ i_G = V$,

(iii) Aljabar-*C** $A \rtimes_\alpha G$ dibangun oleh $\{i_A(a) | a \in A\} \cup \{i_G(x) | x \in G\}$.

Diberikan suatu sistem dinamik (A, G, α) yang terdiri dari aljabar-*C** A, grup G dan aksi yang homomorfisma $\alpha: G \to \mathrm{Aut(A)}$. Misal didefinisikan representasi kovarian (π, V) yang terdiri dari representasi uniter $V: G \to B(H)$ dan representasi unital $\pi: A \to B(H)$ sedemikian sehingga

$$\pi(\alpha_x(a)) = V_x \pi(a)(V_x)^*$$

untuk setiap $a \in A$ dan $g \in G$. Selanjutnya didefinisikan

$$C_c(G, A) \coloneqq \{f: G \to A | \text{hanya berhingga } g \in G \ni f(g) \neq 0\}.$$

Himpunan fungsi $C_c(G, A)$ dilengkapi dengan konvolusi untuk setiap $y \in G$

$$(f * g)(y) = \sum_{x \in G} f(x) \alpha_x(g(x^{-1}y))$$

untuk setiap $x \in G$ dan operasi involusi

$$\left(\sum_{x \in G} f(x) x \right)^* = \sum_{x \in G} \alpha_x(f(x^{-1})^*) x$$

sehingga $C_c(G, A)$ dapat dipandang sebagai aljabar-*. Misal $(\pi \times V)$ adalah representasi-* dari $C_c(G, A)$ di ruang Hilbert H (Williams, 1952:49). Norm aljabar-C^* penuh di $C_c(G, A)$ didefinisikan oleh

$$\|f\| \coloneqq \sup\{\|(\pi \times V)(f)\|\}$$

untuk setiap representasi $(\pi \times V)$. Lengkapan dari $C_c(G, A)$ atas norm tersebut adalah aljabar-C^* yang disebut dengan produk silang penuh atas A oleh G dan dinotasikan dengan $A \rtimes_\alpha G$ (Williams, 1952:52). Norm aljabar-C^* tereduksi di $C_c(G, A)$ didefinisikan oleh

$$\|f\|_L = \|(\bar{\pi} \times L)(f)\|_{B(\mathcal{H})}$$

dimana $(\bar{\pi} \times L): C_c(G, A) \to B(\mathcal{H})$ adalah representasi reguler yang berasosiasi dengan representasi kovarian $(\bar{\pi}, L, H)$ yang diberikan oleh

$$\bar{\pi}(a)\delta_{x,h} = \delta_{x, \pi(x^{-1}a)h}$$

$$L(y)\delta_{x,h} = \delta_{x \quad ,h}$$

untuk setiap $a \in A$, $x, y \in G$ dan $h \in H$ dimana $\pi: A \to B(H)$ adalah representasi yang *faithful* dan
$\mathcal{H} = l^2(G, H) := \left\{\delta_{x,h}: G \to H, x \mapsto \delta_{x,y} h \middle| \delta_{x,y} \text{ adalah delta kronecker}\right\}$.
Produk silang tereduksi $A \rtimes_\alpha G$ adalah lengkapan dari $C_c(G, A)$ atas norm aljabar-C^* tereduksi.

PRODUK SILANG TEREDUKSI DARI ALJABAR-C^* OLEH SEMIGRUP PADA AUTOMORFISMA

Misal M adalah semigrup dengan unsur identitas e, dan $\mathcal{B}$ adalah aljabar-C^* dengan unsur kesatuan $I_\mathcal{B}$. Homomorfisma semigrup

$$W: M \to \mathcal{B}, x \mapsto W_x$$

disebut homomorfisma isometrik jika untuk setiap $x \in M$, W_x adalah isometri. Jika $\mathcal{B} = B(H)$ adalah suatu aljabar dari semua operator linear terbatas di ruang Hilbert H, maka kita sebut (H, W) sebagai suatu representasi isometrik dari M di H.

Misal M dinotasikan sebagai semigrup kanselatif kanan dan H adalah ruang Hilbert tak nol. Himpunan fungsi berikut

$$l^2(M, H) = \left\{f: M \to H \middle| \sum_{x \in M} \|f(x)\|^2 < \infty\right\}$$

dengan penjumlahan dan perkalian skalar titik demi titik, dilengkapi hasilkali dalam yang didefinisikan oleh

$$\langle f | g \rangle = \sum_{x \in M} \langle f(x) | g(x) \rangle$$

dan norm

$$\|f\| = \left(\sum_{x \in M} \|f(x)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

adalah sebuah ruang Hilbert.

Misalkan

$$L: M \to B\left(l^2(M, H)\right), x \mapsto L_x$$

dimana untuk setiap $x \in M$, pemetaan L_x di $l^2(M, H)$ didefinisikan oleh

$$(L_x f)(z) = \begin{cases} f(y) \text{ jika } z = x & \forall y \in M \\ 0, \text{ jika } z \neq x \end{cases}.$$

Misal sistem dinamik (A, M, α) terdiri dari aljabar-C^* unital A, semigrup kanselatif kanan (dengan unsur identitas) M, dan α adalah homomorfisma dari M ke grup automorfisma di A. Misal $\mathcal{B}$ adalah aljabar-C^*, aljabar multiplier dari $\mathcal{B}$ dinotasikan dengan $\mathcal{M}(\mathcal{B})$. Jika B adalah aljabar-C^* unital maka $B = \mathcal{M}(\mathcal{B})$.

Homomorfisma kovarian dari sistem dinamik (A, M, α) adalah pasangan (φ, W) yang terdiri dari homomorfisma-*

$$\varphi: A \to \mathcal{B}, a \longmapsto \varphi(a)$$

dan homomorfisma isometrik

$$W: M \to \mathcal{B}, x \longmapsto W_x$$

dimana keduanya dikaitkan oleh relasi kovarian

$$\varphi\big(\alpha_x(a)\big)W_x = W_x\varphi(a) \ \forall x \in M \text{ dan } a \in A.$$

Jika $\mathcal{B} = B(H)$ untuk suatu ruang Hilbert H, maka (H, φ, W) disebut sebagai reperesentasi kovarian dari sistem dinamik (A, M, α).

Untuk mengkonstruksi suatu produk silang dari sistem dinamik (A, M, α), G.J Murphy [5] memisalkan A sebagai aljabar-C^* yang tak nol. Kemudian dibentuk suatu himpunan $A \times M$ dan membangun suatu aljabar-* F yang bebas. Misal sistem dinamik (A, M, α) memiliki representasi kovarian (H, φ, W), maka terdapat ideal *self-adjoint* dari F misalkan I. Kemudian didefinisikan suatu aljabar-* yaitu kosien F/I yang unital. Misal terdapat homomorfisma-*

$$\tilde{\rho}: A \to F/I, a \longmapsto a + I$$

dan homomorfisma isometrik

$$\tilde{V}: M \to F/I, x \longmapsto x + I$$

dimana keduanya dikaitkan oleh relasi kovarian

$$\tilde{\rho}\alpha_x(a)\tilde{V}_x = \tilde{V}_x\tilde{\rho}(a) \ \forall a \in A \text{ dan } x \in M.$$

Perhatikan bahwa aljabar-* F/I dibangun oleh $\tilde{\rho}(A) \cup \tilde{V}(M)$ dimana $\tilde{V}(M) = \{\tilde{V}_x | x \in M\}$. Kita ingin mendefinisikan norm-C^* di kosien aljabar-* F/I menggunakan seminorm-C^* di F/I katakanlah γ. Selanjutnya, perhatikan lemma berikut ini.

Lemma 4.2.1[5]

Misal γ adalah seminorm-C^* di F/I maka untuk setiap $a \in A$, $a \longmapsto \gamma\big(\tilde{\rho}(a)\big)$ adalah seminorm-C^* di A sedemikian sehingga $\gamma\big(\tilde{\rho}(a)\big) \leq \|a\|$.

Dari lemma tersebut dapat dilihat bahwa pada γ berlaku *norm-decreasing.* Kemudian perhatikan juga bahwa $\gamma\big(\tilde{V}_x\big)^2 = \gamma\big(\tilde{V}_x^{\,*}\tilde{V}_x\big) = \gamma(1) \leq 1$. Akibatnya F/I memuat seminorm-C^* terbesar yaitu

$$\gamma_U: F/I \to \mathbb{R}^+, c \longmapsto \gamma_U(c)$$

dimana $\gamma_U(c) = \gamma\big(\tilde{\rho}(a)\big) \cup \gamma\big(\tilde{V}_x\big)$. Berdasarkan Definisi 2.4.24 aljabar-* kosien F/I memiliki ideal yang *self-adjoint* yaitu

$$J = \{c \in F/I | \gamma_U(c) = 0\}.$$

Selanjutnya dapat dibentuk suatu aljabar-* kosien $(F/I)/J$ dengan norm-C* yang didefinisikan oleh

$$D_{\mathbb{C}} = \{\|c + J\| = \gamma_{\mathbb{C}}(c) | c \in F/I\}.$$

Misal D adalah lengkapan-C^* dari $(F/I)/J$ atas norm-C* $D_{\mathbb{C}}$ dan suatu homomorfisma-*

$$\pi: F/I \to D, c \longmapsto \pi(c) = c + J.$$

Misal $\rho(a) = \pi\bar{\rho}(a)$ untuk setiap $a \in A$ dan $V_x = \pi\bar{V}_x$ untuk setiap $x \in M$. Selanjutnya didefinisikan suatu homomorfisma-*

$$\rho: A \to A \rtimes_\alpha M, a \longmapsto \rho(a)$$

dan homomorfisma isometrik

$$V: M \to A \rtimes_\alpha M, x \longmapsto V_x$$

dimana $\rho(a) = \pi\bar{\rho}(a)$ untuk setiap $a \in A$ dan $V_x = \pi\bar{V}_x$ untuk setiap $x \in M$. Kemudian dinotasikan suatu subaljabar-C* dari D yaitu

$$A \rtimes_\alpha M = \{\pi\bar{\rho}(a) | a \in A\} \cup \{\pi\bar{V}_x | x \in M\}$$

maka aljabar-C^* $A \rtimes_\alpha M$ dibangun oleh $\rho(a)V_x$ untuk setiap $a \in A$ dan $x \in M$.

Dari konstruksi aljabar-C^* diatas telah diperoleh suatu bentuk produk silang dari A yaitu $A \rtimes_\alpha M$ oleh semigrup M dengan aksi α. Pasangan (ρ, V) merupakan homomorfisma kovarian dari (A, M, α) ke $A \rtimes_\alpha M$.

Proposisi 4.3.4[5]

Misal (A, M, α) merupakan sistem dinamik. Pemetaan kanonik ρ dan V adalah injektif dan aljabar-C yang dinotasikan dengan $A \rtimes_\alpha M$ dibangun oleh semua $\rho(a)V_x$ untuk setiap $a \in A$ dan $x \in M$. Jika (φ, W) adalah homomorfisma kovarian dari (A, M, α) ke aljabar-C* unital B, maka terdapat homomorfisma-* yang unik $\varphi \times W: A \rtimes_\alpha M \to B$ sedemikian sehingga:*

$$(\varphi \times W)(\rho(a)V_x) = \varphi(a)W_x \quad \forall a \in A \; x \in M$$

Bukti:

Misal (φ, W) adalah homomorfisma kovarian dari (A, M, α) ke aljabar-C^* unital $\mathcal{B}$, dimana terdiri dari homomorfisma-*

$$\varphi: A \to \mathcal{B}, a \longmapsto \varphi(a)$$

dan homomorfisma isometrik

$$W: M \to \mathcal{B}, x \longmapsto W_x.$$

Relasi kovarian dari kedua pemetaan tersebut ialah

$$\varphi\big(\alpha_x(a)\big)W_x = W_x\varphi(a) \; \forall x \in M \text{ dan } a \in A.$$

Misal F adalah aljabar-* yang bebas pada himpunan $A \cup M$, maka terdapat secara tunggal homomorfisma-* $\psi: F \to \mathcal{B}$ dimana

$$\psi(a) = \varphi(a), \forall a \in A$$

$\psi(x) = W_x, \forall x \in M.$

Aljabar-* F memuat suatu adalah ideal *self-adjoint* paling kecil yang dinotasikan dengan I dimana $\psi(I) = 0$, sehingga dapat didefinisikan homomorfisma-* $\bar{\psi}: F/I \to \mathcal{B}$.

Telah didefinisikan bahwa D adalah lengkapan-C^* dari $(F/I)/J$ dan terdapat homomorfisma-* $\pi: F/I \to D$. Misal terdapat suatu homomorfisma-* $\breve{\psi}: D \to \mathcal{B}$ sedemikian sehingga $\breve{\psi}\pi = \bar{\psi}$.

Telah dinotasikan sebelumnya bahwa $\rho(a) = \pi\bar{\rho}(a)$ untuk setiap $a \in A$ dan $V_x = \pi\bar{V}_x$ untuk setiap $x \in M$, dimana

$$\bar{\rho}: A \to F/I, a \mapsto a + I$$

adalah homomorfisma-* dan

$$\bar{V}: M \to F/I, x \mapsto x + I$$

adalah homomorfisma isometrik. Telah didefinisikan sebelumnya bahwa ρ adalah homomorfisma-* dan V_x merupakan homomorfisma isometrik. Untuk lebih jelas, perhatikan diagram berikut

$$A \xrightarrow{\bar{\rho}} F/I \xrightarrow{\pi} D \xrightarrow{\breve{\psi}} B$$
$$M \xrightarrow{\bar{V}} F/I \xrightarrow{\pi} D \xrightarrow{\breve{\psi}} B.$$

Sehingga berdasarkan diagram tersebut, diperoleh

$$\breve{\psi}\rho(a) = \breve{\psi}\pi\bar{\rho}(a) = \bar{\psi}\bar{\rho}(a) = \psi(a) = \varphi(a), \forall a \in A$$
$$\breve{\psi}W'_x = \breve{\psi}\pi\bar{V}_x = \bar{\psi}\bar{V}_x = \psi(x) = W_x, \forall x \in M.$$

Oleh karena itu

$$\breve{\psi}(\rho(a)V_x) = \breve{\psi}(\rho(a)W'_x) = \varphi(a)W_x$$

jadi terbukti bahwa

$$\varphi \times W: A \rtimes_\alpha M \to B, b \mapsto \breve{\psi}(b)$$

adalah homomorfisma-* yang unik sedemikian sehingga

$$(\varphi \times W)(\rho(a)V_x) = \varphi(a)W_x \quad \forall a \in A \;\; x \in M.$$

Misal (H, φ) adalah representasi yang *faithful* dan unital. Misal $(l^2(M,H), \bar{\varphi}, L)$ adalah representasi kovarian yang diinduksi dari sistem dinamik (A, M, α) yang terdiri dari homomorfisma-*

$$\bar{\varphi}: A \to B\big(l^2(M,H)\big), a \mapsto \bar{\varphi}(a)$$

dan representasi isometrik reguler

$$L: M \to B\big(l^2(M,H)\big), x \mapsto L_x.$$

Telah ditunjukkan bahwa $(l^2(M,H), \bar{\varphi}, L)$ adalah representasi kovarian yang diinduksi dari representasi (H, φ) dan $\bar{\varphi}$ bersifat injektif. Selanjutnya dari representasi kovarian $(l^2(M,H), \bar{\varphi}, L)$ terdapat suatu homomorfisma-* yang unik

$$(\bar{\varphi} \times L): A \rtimes_\alpha M \to B\big(l^2(M,H)\big)$$
$$\rho(a)V_x \mapsto (\bar{\varphi} \times L)\rho(a)V_x = \bar{\varphi}(a)L_x.$$

Jika $0 = \rho(a)$ untuk setiap $a \in A$, maka

$$0 = (\bar{\varphi} \times L)\rho(a) = \bar{\varphi}(a)\ \forall a \in A$$

sehingga diperoleh $0 = a$, jadi homomorfisma-* ρ bersifat injektif. Misal untuk setiap $x, y \in M$ berlaku $V_x = V_y$, maka

$$\bar{\varphi}(a)L_x = (\bar{\varphi} \times L)(\rho(a)V_x) = (\bar{\varphi} \times L)\big(\rho(a)V_y\big) = \bar{\varphi}(a)L_y$$

untuk setiap $a \in A$. Telah ditunjukkan pada subbab 4.1 bahwa L bersifat injektif, maka $x = y$. Oleh karena itu V bersifat injektif.■

Pada pembuktian proposisi diatas disebutkan untuk setiap representasi kovarian $(l^2(M,H), \bar{\varphi}, L)$ terdapat homomorfisma-* yang unik

$$(\bar{\varphi} \times L): A \rtimes_{\alpha} M \to B\big(l^2(M,H)\big)$$

sedemikian sehingga

$$\rho(a)V_x \longmapsto (\bar{\varphi} \times L)\rho(a)V_x = \bar{\varphi}(a)L_x.$$

Selanjutnya dapat didefinisikan suatu produk silang tereduksi dari (A, M, α) yaitu

$$A \rtimes_{\alpha} M = (\bar{\varphi} \times L)(A \rtimes_{\alpha} M) = \bar{\varphi}(a)L_x.$$

Karena $\bar{\varphi}$ dan ρ injektif, maka $\bar{\varphi}\big(\rho(a)\big)$ dapat diidentifikasi untuk setiap unsur a di A. Oleh karena itu bentuk $A \rtimes_{\alpha} M$ dibangun oleh $\{aL_x | a \in A, x \in M\}$.

REFERENSI

Albania, I. N. & Rosjanuardi, R. (2012). “On Graph Algebras and Crossed Product by Semigroups”. *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*. 67, (1), 99-110.

Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Application*s. United States of America : University of Windsor.

Murphy, G. J. (1987). *Ordered Groups and Toeplitz Algebras*. J. Operator Theory. 18. 303-326

Murphy, G.J. (1990). *C*-Algebras and Operator Theory*. Ireland : University College.

Murphy, G.J. (1991). ”Ordered Groups and Crossed Products of *C**-algebras”, *Pacific J. Math*. 148, 319-349.

Rosjanuardi, R. dan Adji, S. (2007). *Twisted Semigroup Crossed Products and Twisted Toeplitz Algebras of Ordered Groups.* Acta Mathematica Sinica. 23 (9). 1639-1648.

S. Adji. (2000). *Semigroup Crossed Products and The Structure of Toeplitz Algebras*. J. Operator Theory. 44. 139-150.

S. Adji, M. Laca, M. Nilsen dan I. Raeburn. (1994). *Crossed Products by Semigroups of Endomorphisms and the Toeplitz Algebras of Ordered Groups*. Proc. Amer. Math. Soc. 122. 1133-1141.

Sierakowski, A. (2009). *Discrete Crossed Product C*-algebras*, Denmark: Department of Mathematical Sciences, Univeristy of Copenhagen.

Simoes, R. (2011). *Product Type Actions with Rokhlin Properties*. Tesis, Universidade Tecnica de Lisboa.

Waskita, A.C. (2008). *Sifat Norm Dari Pemetaan Positif Pada Sistem Operator*. Bandung: Universitas Pendidikan Indonesia, Tugas Akhir.