Kaitan Antara Homomorfisma Pada Graf dan Homomorfisma Pada Aljabar Graf

Nunung Nurhidayah, Rizky Rosjanuardi, Isnie Yusnitha
Departemen Pendidikan Matematika, Universitas Pendidikan Indonesia
Correspondent author: nngnrhdyh@gmail.com

ABSTRAK. Diberikan graf berarah E dan F serta masing-masing aljabar-C^* yang terkait dengan graf tersebut, yakni $C^*(E)$ dan $C^*(F)$. Selanjutnya aljabar-C^* ini disebut sebagai aljabar graf. Homomorfisma pada graf adalah pemetaan ψ dari E ke F yang mengawetkan struktur graf. Sama halnya untuk aljabar-C^* $C^*(E)$ dan $C^*(F)$, homomorfisma pada aljabar graf $C^*(E)$ dan $C^*(F)$ merupakan pemetaan θ dari $C^*(E)$ ke $C^*(F)$ yang mengawetkan struktur aljabar-C^*. Rosjanuardi dan Albania (2012) menyatakan bahwa automorfisma pada graf E dapat menginduksi automorfisma pada aljabar graf $C^*(E)$. Selanjutnya, dari hubungan ini dapat diperoleh bahwa aksi $\lambda : G \to \text{Aut } E$ dapat menginduksi suatu aksi $\bar{\lambda} : G \to \text{Aut } C^*(E)$.

Kata Kunci : aljabar graf, homomorfisma, automorfisma dan aksi.

ABSTRACT. Let E and F be directed graphs and their associated C^*-algebras respectively, $C^*(E)$ and $C^*(F)$. We call this C^*-algebras as graph algebras. Graph homomorphism is a map ψ of E to F such that preserves the structure of graph. Moreover for graph algebras $C^*(E)$ and $C^*(F)$, their homomorphism is a map θ of $C^*(E)$ to $C^*(F)$ such that preserves the structure of graph algebras. Rosjanuardi and Albania (2012) said that an automorphism of E induces an automorphism of graph algebras $C^*(E)$. Furthermore, from this relation we get an action $\lambda : G \to \text{Aut } E$ induces an action $\bar{\lambda} : G \to \text{Aut } C^*(E)$.
Key word : graph algebras, homomorphism, automorphism and action.

1. PENDAHULUAN

Graf berarah $E = \{E^0, E^1, r, s\}$ terdiri dari himpunan *countable* E^0, E^1 dan fungsi $r, s : E^1 \to E^0$. Unsur-unsur di E^0 disebut titik dan unsur-unsur di E^1 disebut sisi. Suatu graf berarah dapat direpresentasikan oleh operator-operator pada ruang Hilbert H, di mana setiap titiknya direpresentasikan sebagai proyeksi yang saling ortogonal pada subruang dari H, dan setiap sisinya direpresentasikan sebagai isometri parsial. Keluarga dari semua proyeksi ortogonal dan isometri parsial dari suatu graf berarah disebut keluarga Cuntz-Krieger-E.

Untuk sebarang graf berhingga baris E, suatu aljabar-C^* $C^*(E)$ yang dibangun oleh keluarga Cuntz-Krieger-E disebut sebagai aljabar-C^* dari graf E atau aljabar Cuntz-Krieger dari E. Selanjutnya, aljabar-C^* dari graf E, yaitu

$C^*(E)$ memiliki sifat universal yang terkait dengan keluarga Cuntz-Krieger dari graf E. aljabar-C^* dari graf *E* ini disebut sebagai aljabar graf.

Pada dasarnya, homomorfisma pada graf dan homomorfisma pada aljabar graf tidak berkaitan satu sama lain. Namun, untuk beberapa kasus tertentu, dapat diperoleh gambaran bahwa kedua konsep ini memiliki kaitan yang sangat erat. Rosjanuardi dan Albania (2012) menyatakan bahwa automorfisma pada graf E dapat menginduksi automorfisma pada aljabar graf $C^*(E)$. Lebih dari itu diperoleh fakta bahwa aksi $\lambda : G \to \mathrm{Aut}\, E$ dapat menginduksi suatu aksi $\bar{\lambda} : G \to \mathrm{Aut}\, C^*(E)$.

2. KELUARGA CUNTZ-KRIEGER-*E*

Graf berarah $E = \{E^0, E^1, r, s\}$ terdiri dari himpunan *countable* E^0, E^1 dan fungsi $r, s : E^1 \to E^0$. Unsur-unsur di E^0 disebut titik dan unsur-unsur di E^1 disebut sisi. Untuk setiap sisi *e*, $s(e)$ merupakan sumber dari *e* dan $r(e)$ merupakan *range* dari *e*. Selanjutnya, E disebut graf berhingga baris jika setiap titiknya menerima paling banyak berhingga sisi, atau dengan kata lain $r^{-1}(v) = \{e \in E^1 |\ r(e) = v\}$ adalah himpunan berhingga untuk setiap $v \in E^0$.

Sebuah barisan sisi $\mu = \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n$ pada E sedemikian sehingga $s(\mu_i) = r(\mu_{i+1})$ di mana $1 \le i \le n-1$ disebut sebagai lintasan dengan panjang n pada suatu graf *E*. Panjang dari lintasan μ ditulis $|\mu|$. Dengan demikian jika $|\mu| \coloneqq n$ maka panjang lintasan μ adalah n. Selanjutnya, E^n adalah himpunan semua lintasan dengan panjang n, dan

$$E^* = \bigcup_{n \ge 0} E^n.$$

Lintasan μ pada suatu graf berarah E disebut siklus (*cycle*) jika $|\mu| \ge 1$, $r(\mu) = s(\mu)$ dan $s(\mu_i) \ne s(\mu_j)$, untuk $i \ne j$.

Suatu graf berarah dapat direpresentasikan oleh operator-operator pada ruang Hilbert H, di mana setiap titiknya direpresentasikan sebagai proyeksi yang saling ortogonal pada subruang dari H, dan setiap sisinya direpresentasikan sebagai isometri parsial. Keluarga dari himpunan proyeksi $\{P_v : v \in E^0\}$ pada H yang saling ortogonal dan himpunan isometri parsial $\{S_e : e \in E^1\}$ pada H sedemikian sehingga :

(CK1) $S_e^* S_e = P_{s(e)}$, untuk setiap $e \in E^1$

(CK2) $P_v = \sum_{\{e \in E^1,\ r(e)=v\}} S_e S_e^*$ untuk v yang bukan menjadi sumber.

disebut keluarga Cuntz-Krieger-E. Lebih lanjut, relasi di atas kita sebut sebagai relasi Cuntz-Krieger- *E*.

3. ALJABAR GRAF

Aljabar-C^* $C^*(E)$ pada proposisi di bawah ini disebut dengan aljabar-C^* dari graf *E* atau aljabar Cuntz-Krieger dari *E*.

Proposisi 3.1 [1] Untuk sebarang graf berhingga baris *E*, terdapat suatu aljabar-C^* $C^*(E)$, yang dibangun oleh keluarga Cuntz-Krieger-*E* $\{s, p\}$, sedemikian sehingga untuk setiap keluarga Cuntz-Krieger-*E* $\{T,Q\}$ dari suatu aljabar-C^* *B*, terdapat homomorfisma dari $C^*(E)$ ke *B* di mana

$$\pi_{T,Q}(s_e) = T_e, \forall e \in E^1 \text{ dan } \pi_{T,Q}(p_v) = Q_v, \forall v \in E^0.$$

Akibat 3.2 [1] Misalkan *E* adalah graf berhingga baris dan *C* adalah aljabar-C^* yang dibangun oleh suatu keluarga Cuntz-Krieger-*E* $\{w, r\}$ sedemikian sehingga untuk setiap keluarga Cuntz-Krieger-*E* $\{T, Q\}$ dari aljabar-C^* *B*, terdapat homomorfisma $\rho_{T,Q}$ dari *C* ke *B* di mana

$$\rho_{T,Q}(w_e) = T_e, \forall e \in E^1$$
$$\rho_{T,Q}(r_v) = Q_v, \forall v \in E^0,$$

maka terdapat isomorfisma dari $C^*(E)$ pada *C* sedemikian sehingga,

$$\phi(s_e) = w_e, \forall e \in E^1$$
$$\phi(p_v) = r_v, \forall v \in E^0.$$

Kemudian notasi $\{s, p\}$ akan dijadikan suatu simbol tetap untuk keluarga Cuntz-Krieger-*E* yang memenuhi sifat yang universal. Selanjutnya, aljabar-C^* yang dibangun oleh keluarga Cuntz-Krieger-*E* $\{s, p\}$ disebut aljabar graf.

4. HOMOMORFISMA PADA GRAF

Misalkan E dan F suatu graf. Homomorfisma graf $\psi : E \to F$ adalah pasangan pemetaan $\psi = (\psi^0, \psi^1)$ di mana $\psi^i : E^i \to F^i$ untuk $i = 0{,}1$, sedemikian sehingga $\psi^0\big(r(e)\big) = r\big(\psi^1(e)\big)$ dan $\psi^0\big(s(e)\big) = s\big(\psi^1(e)\big)$, untuk setiap $e \in E^1$.

Suatu isomorfisma dari E ke F adalah homomorfisma $\psi: E \to F$ yang bijektif. Selanjutnya, suatu isomorfisma $\varphi: E \to E$ disebut automorfisma dari E dan himpunan semua automorfisma dari E dinotasikan sebagai A E.

5. HOMOMORFISMA PADA ALJABAR GRAF

Keberadaan homomorfisma pada aljabar-C^* telah dijelaskan sebelumnya pada Proposisi 3.1 dan Akibat 3.2. Tak jauh berbeda dengan homomorfisma pada aljabar-C^*, misalkan $C^*(E)$ dan B adalah suatu aljabar graf yang masing-masing dibangun oleh keluarga Cuntz-Krieger-E $\{s, p\}$ dan keluarga Cuntz-Krieger-E

$\{t, q\}$, homomorfisma pada aljabar graf didefinisikan sebagai suatu pemetaan dari $C^*(E)$ pada B

$$\theta: C^*(E) \to B$$

sehingga berlaku

$$\theta(s_e) = t_e, \forall e \in E^1$$
$$\theta(p_v) = q_v, \forall v \in E^0.$$

Suatu isomorfisma dari dari $C^*(E)$ pada B adalah homomorfisma $\theta: C^*(E) \to B$ yang bijektif. Selanjutnya, suatu isomorfisma $\theta: C^*(E) \to C^*(E)$ disebut automorfisma dari $C^*(E)$ dan himpunan semua automorfisma dari E dinotasikan sebagai $\mathrm{Aut}\, C^*(E)$.

6. KAITAN ANTARA HOMOMORFISMA PADA GRAF DAN HOMOMORFISMA PADA ALJABAR GRAF

Homomorfisma pada graf dan homomorfisma pada aljabar graf dapat dikaitkan melalui konsep aksi grup pada suatu graf. Grup *G* disebut beraksi pada *E* jika terdapat suatu homomorfisma grup $\lambda : g \mapsto \lambda_g$ dari *G* ke $\mathrm{Aut}(E)$.

Berikut adalah teorema yang menunjukkan kaitan diantara keduanya:

Teorema 6.1 [2] Misalkan E adalah suatu graf dan G adalah suatu grup. Suatu aksi $\lambda : G \to \mathrm{Aut}\, E$ dapat menginduksi suatu aksi $\bar{\lambda} : G \to \mathrm{Aut}\, C^*(E)$ sedemikian sehingga $\bar{\lambda}_g(S_e) = S_{\lambda_g(e)}$.

Bukti :

Keberadaan aksi pada aljabar graf $C^*(E)$ dapat ditunjukkan dengan cara yang analog seperti pada (Raeburn, 2004, hlm. 15). Namun, pada skripsi ini grup yang digunakan adalah grup yang lebih umum dan definisi dari aksi pada aljabar graf $C^*(E)$ diinduksi dari aksi pada graf.

Misalkan,

$$\begin{aligned} \lambda : G &\to \mathrm{Aut}\, E \\ g &\longmapsto \lambda_g : E \to E \\ & \qquad e \longmapsto \lambda_g(e) = e \end{aligned}$$

aksi pada graf E. Akan ditunjukkan bahwa

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} : G &\to \mathrm{Aut}\, C^*(E) \\ g &\longmapsto \bar{\lambda}_g : C^*(E) \to C^*(E) \\ & \qquad S_e \longmapsto \bar{\lambda}_g(S_e) = S_{\lambda_g(e)} \end{aligned}$$

adalah suatu automorfisma pada $C^*(E)$ dan suatu homomorfisma grup.

1. Akan ditunjukkan $\bar{\lambda}_g$ suatu automorfisma pada $C^*(E)$
   - Harus ditunjukkan $\bar{\lambda}_g$ adalah suatu homomorfisma-$*$

Misalkan $S_\epsilon, S_f \in C^*(E)$ dan α sebarang skalar.

(i) $\bar{\lambda}_y(S_\epsilon + S_f) = S_{\lambda_g(\epsilon+f)}$

$= S_{\lambda_g(\epsilon)+\lambda_g(f)}$

$= S_{\lambda_g(\epsilon)} + S_{\lambda_g(f)}$

$= \bar{\lambda}_y(S_\epsilon) + \bar{\lambda}_y(S_f)$

(ii) $\bar{\lambda}_y(S_\epsilon S_f) = S_{\lambda_g(\epsilon\quad)}$

$= S_{\lambda_g(\epsilon)\lambda_g(f)}$

$= S_{\lambda_g(\epsilon)} S_{\lambda_g(f)}$

$= \bar{\lambda}_y(S_\epsilon)\bar{\lambda}_y(S_f)$

(iii) $\bar{\lambda}_y(\alpha S_\epsilon) = \alpha S_{\lambda_g(\epsilon)}$

$= \alpha\, \bar{\lambda}_y(S_\epsilon)$

(iv) $\bar{\lambda}_y({S_\epsilon}^*) = {S^*}_{\lambda_g(\epsilon)}$

$= \left(S_{\lambda_g(\epsilon)}\right)^*$

$= \left(\bar{\lambda}_y(S_\epsilon)\right)^*$

Jadi, $\bar{\lambda}_y$ adalah suatu homomorfisma-$*$.

- Akan ditunjukkan $\bar{\lambda}_y$ adalah suatu fungsi injektif

  Ambil sebarang $S_\epsilon, S_f \in C^*(E)$ sedemikian sehingga $\bar{\lambda}_y(S_\epsilon) = \bar{\lambda}_y(S_f)$

$$\bar{\lambda}_y(S_\epsilon) = \bar{\lambda}_y(S_f)$$
$$S_{\lambda_g(\epsilon)} = S_{\lambda_g(f)}$$
$$S_\epsilon = S_f$$

- Akan ditunjukkan $\bar{\lambda}_y$ adalah suatu fungsi pada.

  Ambil sebarang $S_\epsilon \in C^*(E)$.

  Akan ditunjukkan terdapat $S_\epsilon \in C^*(E)$ sehingga berlaku $\bar{\lambda}_y(S_\epsilon) = S_\epsilon$.

$$\bar{\lambda}_y(S_\epsilon) = S_{\lambda_g(\epsilon)} = S_\epsilon$$

2. Akan ditunjukkan $\bar{\lambda}$ suatu homomorfisma grup.

- Akan ditunjukkan $\bar{\lambda}$ pemetaan

  Misalkan $g_1, g_2 \in G$ dengan $g_1 = g_2$.

$g_1 = g_2$

$\lambda_{y_1}(\epsilon) = \lambda_{y_2}(\epsilon)$

$S_{\lambda_{g_1}(\epsilon)} = S_{\lambda_{g_2}(\epsilon)}$

$\bar{\lambda}_{y_1}(S_\epsilon) = \bar{\lambda}_{y_2}(S_\epsilon)$, untuk setiap $e \in E$.

- Akan ditunjukkan $\bar{\lambda}$ homomorfisma

Ambil sebarang $g_1, g_2 \in G$.

$$
\begin{aligned}
\bar{\lambda}_{g_1+g_2}(S_e) &= S_{\lambda_{g_1+g_2}(e)} \\
&= S_{\lambda_{g_1}(e)} + S_{\lambda_{g_2}(e)} \\
&= S_{\lambda_{g_1}(e)} + S_{\lambda_{g_2}(e)} \\
&= \bar{\lambda}_{g_1}(S_e) + \bar{\lambda}_{g_2}(S_e), \text{ untuk setiap } e \in E.
\end{aligned}
$$

Berdasarkan teorema di atas, aksi pada graf E (dimana automorfisma graf E itu sendiri merupakan homomorfisma pada graf E yang bersifat bijektif) ternyata dapat menginduksi suatu aksi lain aljabar graf $C^*(E)$ (dimana automorfisma aljabar graf $C^*(E)$ itu sendiri merupakan homomorfisma pada aljabar graf $C^*(E)$ yang bersifat bijektif).

REFERENSI

[1] Raeburn, I. (2004). *Graph Algebras*. Rhode Island: American Mathematical Society.

[2] Rosjanuardi, R. & Albania, I.N. (2012). *On Graph Algebras and Crossed Product by Semigroups.* Dalam *Far East Journal of Mathematics Science* 6, 99-110.